

Traitement des signaux

Section de Génie Electrique et Electronique
5ème semestre

Prof. Jean-Philippe Thiran
Laboratoire de traitement des signaux (LTS5)

Prof. Pascal Frossard
Laboratoire de traitement des signaux (LTS4)



Chapitre 1

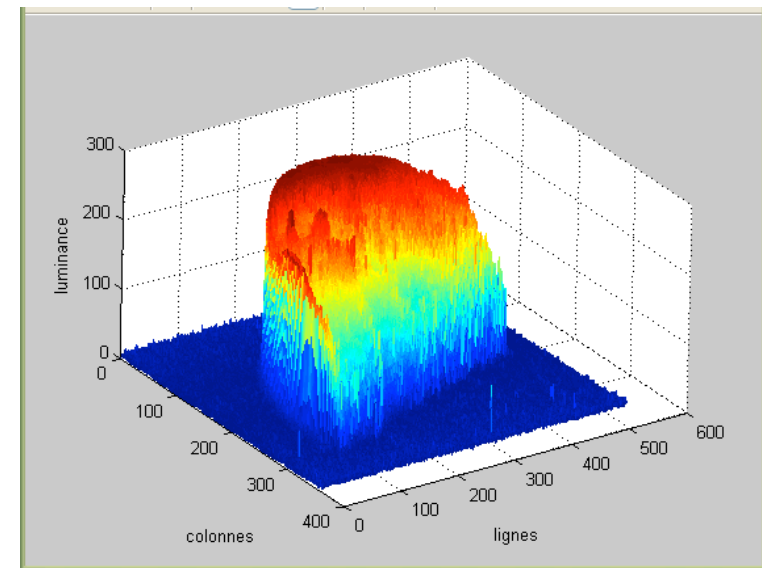
Introduction

- 1.1 Définitions de base
- 1.2 Typologie des signaux
- 1.3 Quelques signaux particuliers
- 1.4 Signaux numériques



1.1 Définitions de base

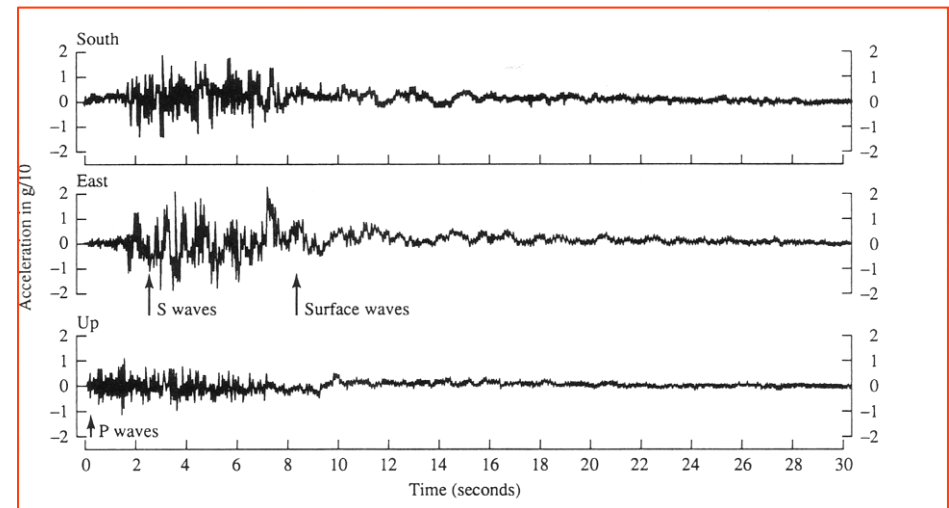
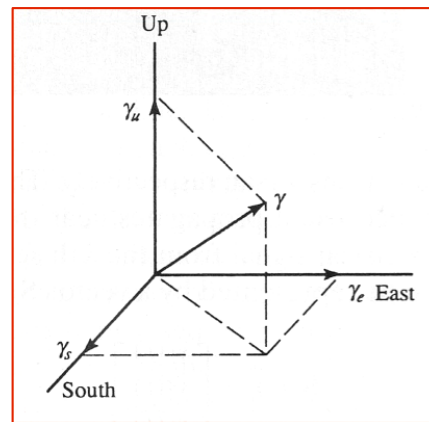
- Un signal :
 - toute quantité physique qui varie au cours du temps, de l'espace ou de toute autre(s) variable(s) indépendante(s).
 - support physique d'une information.
- Exemples de signaux:
 - $s_1(t) = 5t$
 - $s_2(t) = A \sin(2\pi ft)$
 - signal de parole
 - $s_3(x, y) = 3x + 2xy + 10y^2$
 - image



1.2 Typologie des signaux

- Signaux mono-canaux ou multi-canaux
 - Un signal est une fonction d'une ou plusieurs variables indépendantes
 - La valeur de la fonction (la variable dépendante) peut être scalaire (entier, réel, complexe, ...)
 - $s_2(t) = A \sin(2\pi f t)$
 - $s_4(t) = A e^{j3\pi t} = A \cos(3\pi t) + j A \sin(3\pi t)$
 - Dans certaines applications, le signal peut provenir de plusieurs sources ou de plusieurs senseurs

- ex : sismomètre



Reproduits de Proakis & Manolakis, «Digital Signal Processing», 2007

1.2 Typologie des signaux

- Signaux mono-canaux ou multi-canaux (suite)

- une image est un signal multi-dimensionnel qui peut être

- monochromatique («noir et blanc») : $I(x, y)$
- polychromatique («couleur» : 3 canaux : rouge, vert, bleu) : $I(x, y) = \begin{bmatrix} I_r(x, y) \\ I_v(x, y) \\ I_b(x, y) \end{bmatrix}$



=



+



+



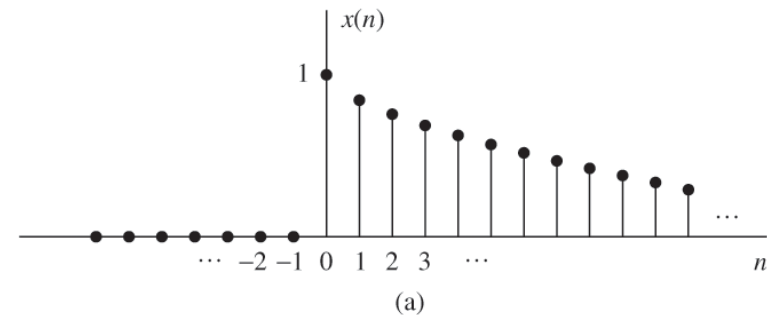
- il existe des images multispectrales et même hyperspectrales

- une séquence vidéo est un signal spatio-temporel : $I(x, y, t)$

1.2 Typologie des signaux

- Signaux analogiques ou signaux à temps discret
 - analogiques (ou à temps continu) : la variable indépendante est **continue**
 - à temps discret, ou échantillonnés : la variable indépendante est **discrète**

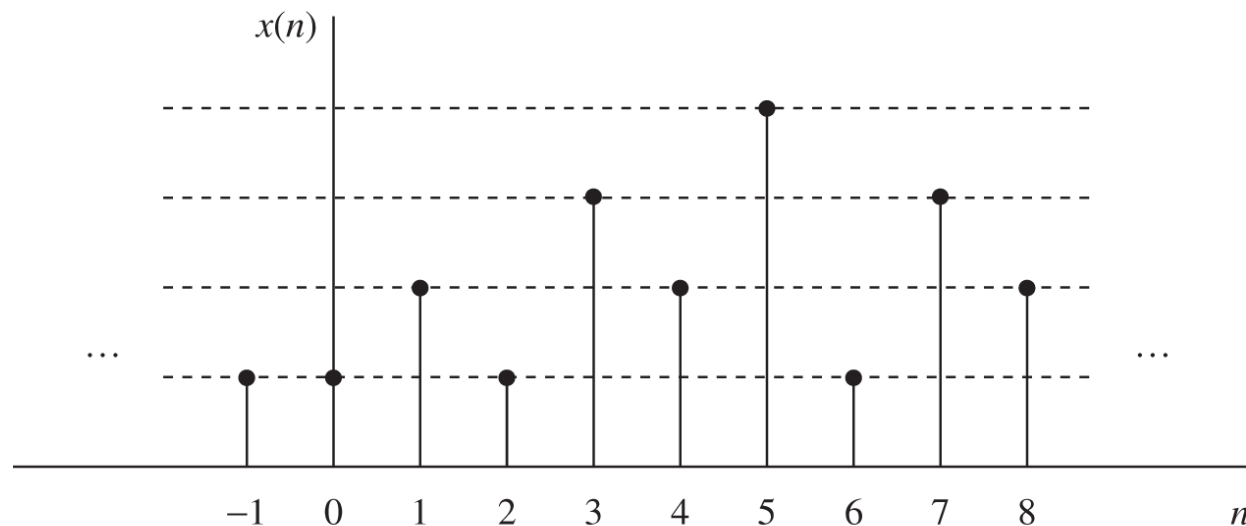
$$x(n) = \begin{cases} 0.8^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



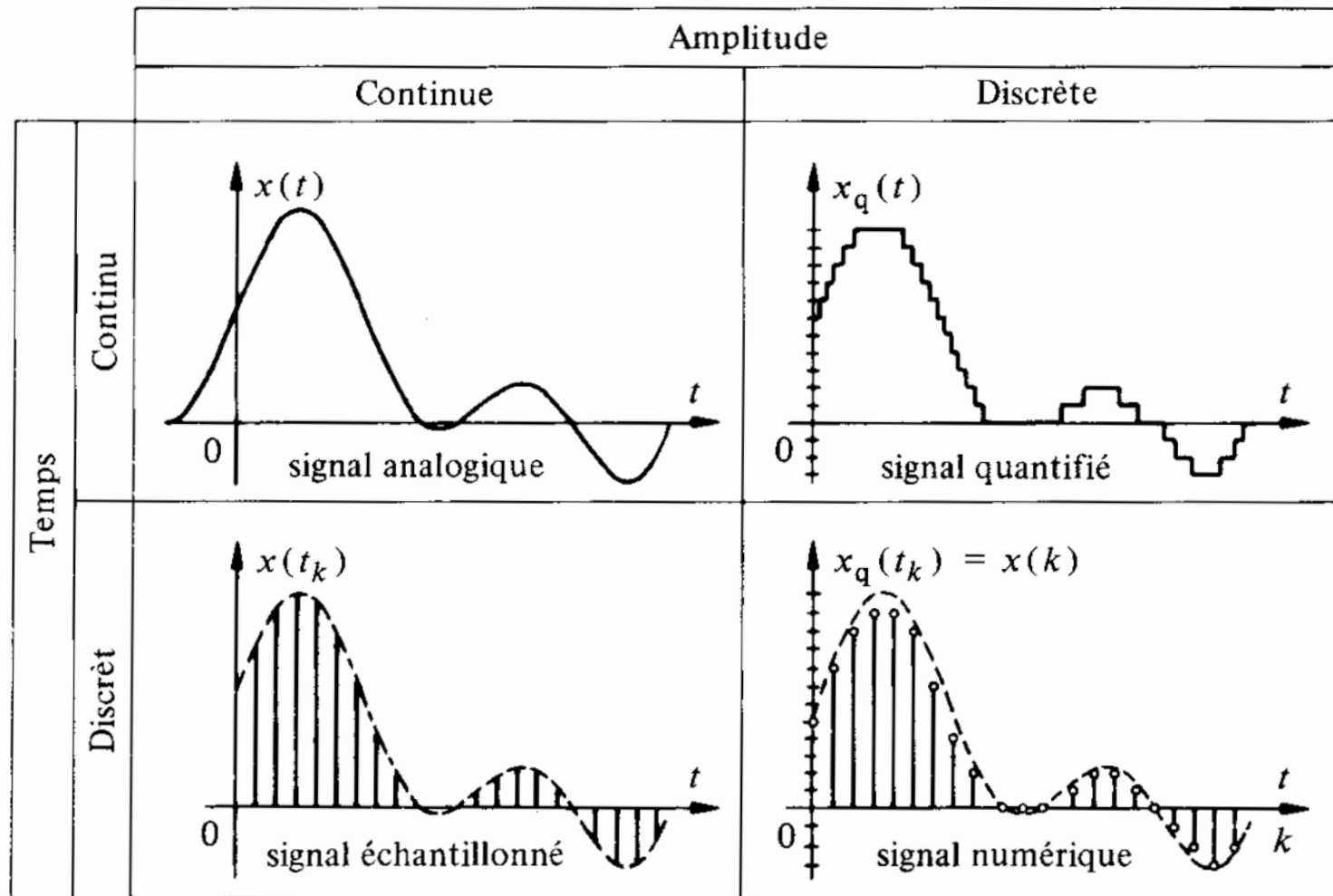
- peuvent être obtenus en sélectionnant des valeurs sur un signal à temps continu, à des instants discrets -> **échantillonnage**
- ou, par exemple, en accumulant des valeurs sur une période de temps : **comptage**
 - ex : nombre de voiture par heure

1.2 Typologie des signaux

- Signaux à valeur continue ou à valeur discrète
 - signaux analogiques à valeur continue
 - signaux analogiques à valeur discrete : signaux **quantifiés**
 - signaux discets à amplitude discrete : signaux **numériques**



1.2 Typologie des signaux



Reproduit de «Théorie et traitement des signaux», F. de Coulon, PPUR

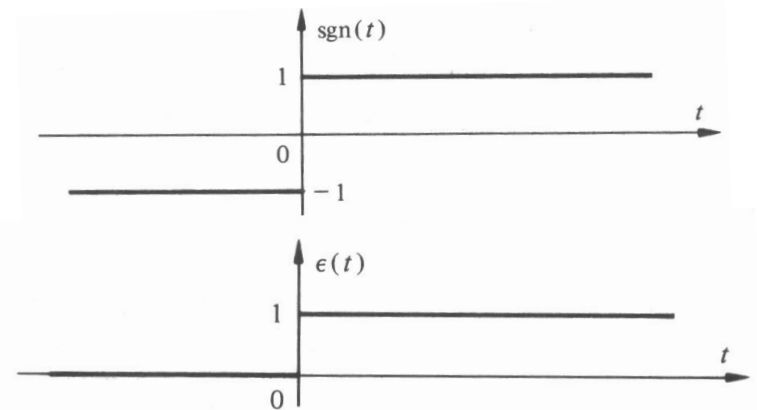
1.3 Quelques signaux particuliers

- Signaux périodiques :

$$x(t) = x(t + nT) \quad \forall n$$

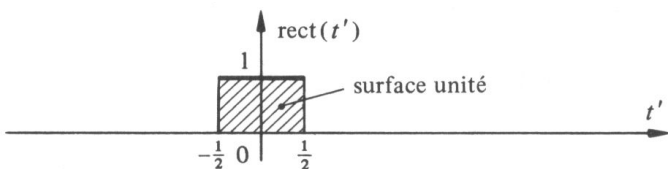
- Quelques signaux particuliers analogiques (et leurs notations)

- fonction signe : $sgn(t) = \frac{t}{|t|}$

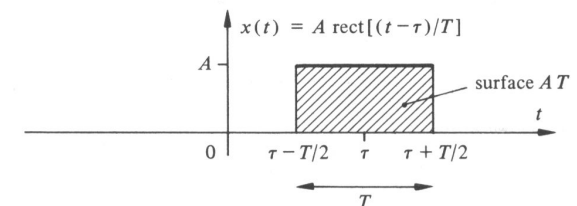


- échelon unité : $\epsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t)$

- fonction rectangle : $rect(t) = \epsilon(t + 1/2) - \epsilon(t - 1/2)$



$$x(t) = rect\left(\frac{t - \tau}{T}\right)$$



1.3 Quelques signaux particuliers

- la fonction rectangle est fréquemment utilisée pour extraire une portion d'un signal (**fenêtrage**)

$$x(t, T) = x(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

- elle permet de définir

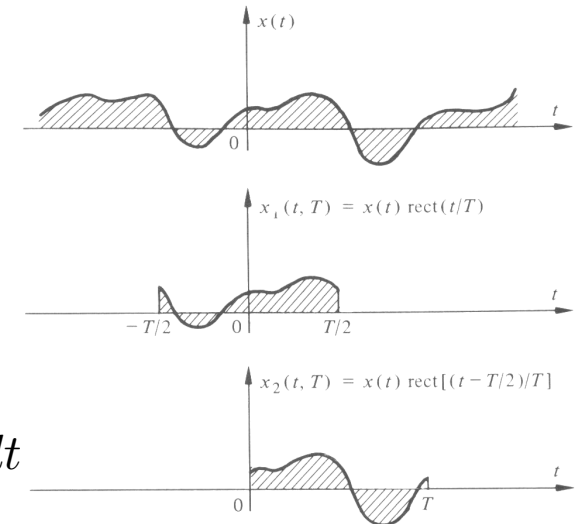
- la valeur moyenne d'un signal sur l'intervalle T :

$$\bar{x}(T) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

- la valeur quadratique moyenne d'un signal sur l'intervalle T :

$$P_x(T) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

- la valeur efficace d'un signal sur l'intervalle T : $x_{eff}(T) = \sqrt{P_x(T)}$



Reproduit de «Théorie et traitement des signaux», F. de Coulon, PPUR

1.3 Quelques signaux particuliers

- Et ensuite

- la moyenne d'un signal : $\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$
- La puissance d'un signal : $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} P_x(T)$
- La valeur efficace d'un signal : $x_{eff} = \lim_{T \rightarrow \infty} x_{eff}(T)$
- Exemple : $x(t) = A \sin(t)$
 - $\bar{x}(T) =$
 - $P_x(T) =$
 - $P_x =$
 - $x_{eff} =$

1.3 Quelques signaux particuliers

- Et ensuite

- la moyenne d'un signal : $\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$

- La puissance d'un signal : $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} P_x(T)$

- La valeur efficace d'un signal : $x_{eff} = \lim_{T \rightarrow \infty} x_{eff}(T)$

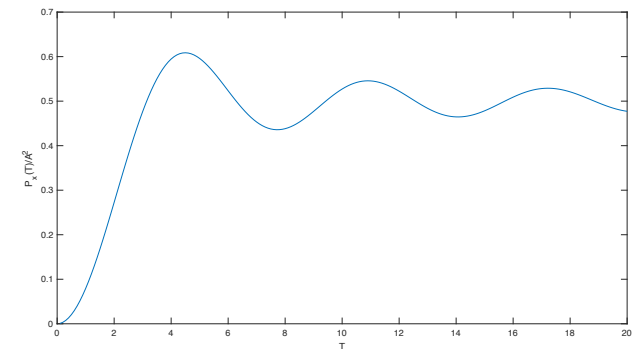
- Exemple : $x(t) = A \sin(t)$

- $\bar{x}(T) = 0$

- $P_x(T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \sin^2(t) dt = \frac{A^2}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{-T/2}^{T/2} = \dots = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2 \sin T}{2T}$

- $P_x = \frac{A^2}{2}$

- $x_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$



1.3 Quelques signaux particuliers

- Impulsion de Dirac

- définition : $\delta(t) = \frac{d}{dt}\epsilon(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

- Propriétés principales:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

- $x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$

- $x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$

- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$

- $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(t)$

Rappel $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$

- $x(t) * \delta(t - T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta((t - T) - \tau) d\tau$
 $= x(t - T)$

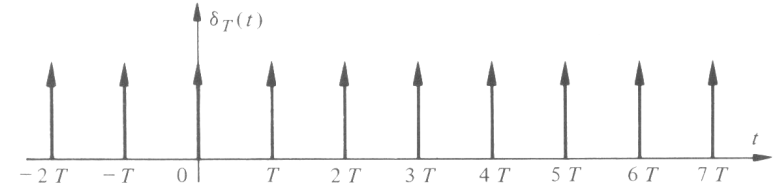


Paul Dirac (1902-1984), Nobel de physique en 1933 avec Erwin Schrödinger

1.3 Quelques signaux particuliers

- Suite périodique d'impulsions de Dirac : peigne de Dirac

- définition: $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$



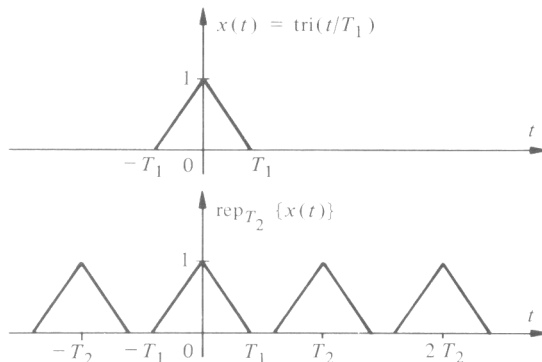
Figures reproduites de «Théorie et traitement des signaux», F. de Coulon, PPUR

- Propriétés:

- $x(t) \cdot \delta_T(t)$ échantillonnage : période d'échantillonnage : T

fréquence d'échantillonnage : $f_e = 1/T$

- $x(t) * \delta_T(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta_T(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau - nT) d\tau \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau - nT) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT)
 \end{aligned}$$

1.3 Quelques signaux particuliers

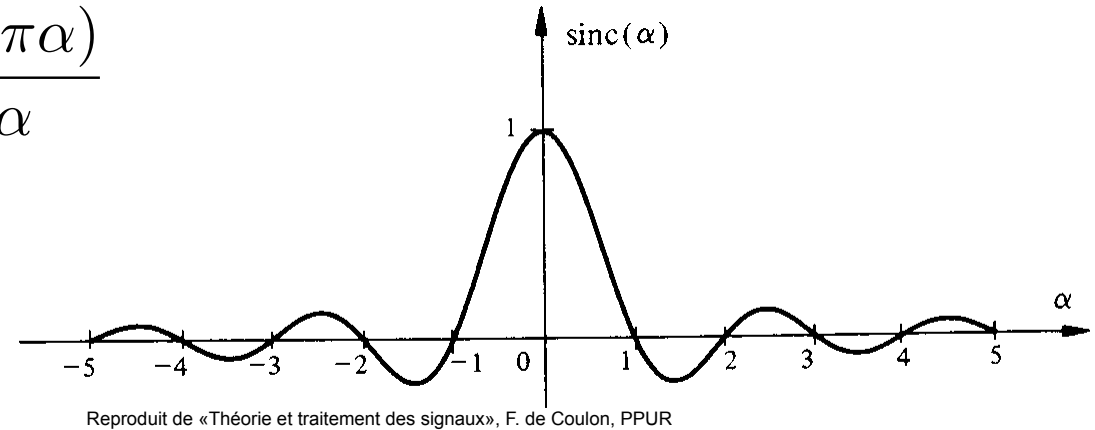
- Sinus cardinal: $\text{sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$

- Propriétés:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\alpha) d\alpha = 1$

- avec $\alpha = Tf$: $\int_{-\infty}^{\infty} T \text{sinc}(Tf) df = 1 \quad \forall T$

- $\lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}(Tf) = \delta(f)$



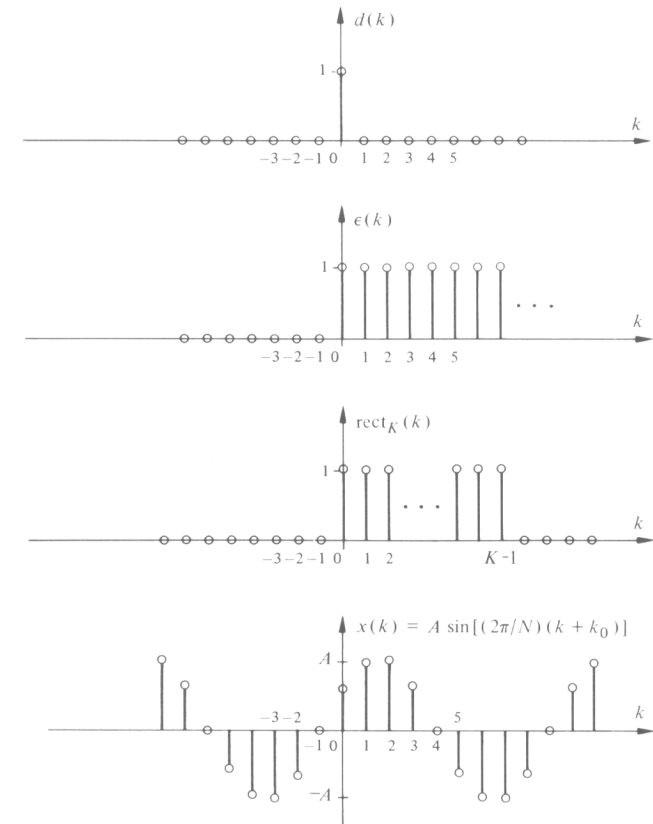
1.4 Signaux numériques

- Définitions

- échantillonnage d'un signal analogique : $x(k\Delta t)$
- signal numérique : $x(k)$ (par exemple, en posant $\Delta t = 1$)

- Quelques signaux élémentaires:

- $\delta(k) = d(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $\epsilon(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$
- $rect_K(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq k \leq K-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $x(k) = Ae^{j2\pi fk} = A(\cos(2\pi fk) + j\sin(2\pi fk))$



Reproduit de «Traitement numérique des Signaux, M. Kunt, PPUR

Chapitre 2

Analyse et synthèse de signaux déterministes

- 2.1 Représentation vectorielle des signaux
- 2.2 Théorème de la projection
- 2.3 Développement en série de fonctions orthogonales
- 2.4 Orthogonalisation de Gram-Schmidt
- 2.5 Quelques ensembles de fonctions orthogonales



2.1 Représentation vectorielle des signaux

- Principe : $x(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \Psi_k(t)$
 - α_k : **représentation discrète du signal**
 - le choix des fonctions de base $\Psi_k(t)$ peut favoriser la mise en évidence de propriétés particulières du signal, et faciliter l'étude des transformations qu'il peut subir au travers de dispositifs physiques (filtres, etc.)
 - la représentation discrète est associée à un **vecteur** dans un espace de dimension n (éventuellement infini)
- Soit $\{\Psi_k(t)\}$ un ensemble de n fonctions linéairement indépendantes formant une base dans l'espace des signaux
 - la séquence $\{\alpha_k\}$ forme un vecteur dans l'espace défini par la base $\{\Psi_k(t)\}$
 - il y a une correspondance bi-univoque entre les $\{\alpha_k\}$ et $x(t)$

2.1 Représentation vectorielle des signaux

- Espace L^2 des signaux à énergie finie
 - L'ensemble de tous les signaux définis sur un intervalle $[t_1, t_2]$ de carré intégrable forme un espace fonctionnel, dont la norme est

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt}$$

- La distance entre deux signaux : $d(x, y) = \|x(t) - y(t)\| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |x(t) - y(t)|^2 dt}$
- le produit scalaire entre deux signaux: $\langle x, y \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)^* dt$
avec $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$
- Signaux orthogonaux: $\langle x, y \rangle = 0$

2.1 Représentation vectorielle des signaux

- Lien entre produit scalaire et distance:

$$\begin{aligned}
 d^2(x, y) &= \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - y(t)][x(t) - y(t)]^* dt \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle^* \\
 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\text{si } x \perp y : d^2(x, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

2.1 Représentation vectorielle des signaux

- Développement en série : calcul des α_k

Soit $x(t) \in L^2$ de dimension n

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \Psi_k(t)$$

Soit $\{\Psi_k(t)\}$ un ensemble de $m < n$ fonctions de base de L^2 formant une base d'un sous-ensemble de L^2

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^m \alpha'_k \Psi_k(t)$$

Le signal d'erreur entre ces deux signaux est

$$e(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \text{ et } \|e\| = d(x, \tilde{x}(t))$$

2.2 Théorème de la projection

- Théorème de la projection

La distance $d(x, \tilde{x}(t))$ entre une fonction $x(t)$ et son approximation $\tilde{x}(t)$ est minimale si l'erreur d'approximation $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ est orthogonale aux fonction $\Psi_k(t)$: $\langle e, \Psi_k \rangle = 0 \quad \forall k$.

- Démonstration:

Soit $\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \Psi_k(t)$ une approximation d'ordre m de $x(t)$ telle que l'erreur $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ satisfasse la condition.

Soit $\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^m \beta_k \Psi_k(t)$ une autre approximation.

$$d^2(x, \hat{x}) = d^2(x - \tilde{x}, \hat{x} - \tilde{x}) = \|x - \tilde{x}\|^2 + \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle x - \tilde{x}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle$$

Or $\langle x - \tilde{x}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle = 0$ car $\hat{x}(t) - \tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^m (\beta_k - \alpha_k) \Psi_k(t)$ et $\langle x - \tilde{x}, \Psi_k \rangle = 0$

Donc $d^2(x, \hat{x}) = \|x - \tilde{x}\|^2 + \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2$ qui est minimale si $\hat{x}(t) = \tilde{x}(t)$.



2.2 Théorème de la projection

- Comment déterminer les coefficients α_k ?

$$\langle x, \Psi_l \rangle = \langle \tilde{x} + e, \Psi_l \rangle = \langle \tilde{x}, \Psi_l \rangle$$

$$\text{car } \langle e, \Psi_l \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle x, \Psi_l \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \Psi_k, \Psi_l \rangle \alpha_k, \quad l = 1 \dots m$$

Définissons

$$\gamma_l = \langle x, \Psi_l \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \Psi_l^*(t) dt \quad \Rightarrow \quad \Gamma = [\gamma_1 \dots \gamma_m]^T$$

et

$$\lambda_{kl} = \langle \Psi_k, \Psi_l \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \Psi_k(t) \Psi_l^*(t) dt \quad \Rightarrow \quad \Lambda = [\lambda_{kl}]$$

$$\Rightarrow \Gamma = \Lambda \cdot \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \Lambda^{-1} \cdot \Gamma}$$



2.3 Développement en série de fonctions orthogonales

- Si les fonctions de base sont orthogonales:

$$\lambda_{kl} = 0 \quad \forall k \neq l$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \Psi_k(t)$$

- les coefficients sont dits indépendants

$$- \alpha_k = \frac{1}{\lambda_k} \langle x, \Psi_k \rangle = \frac{1}{\lambda_k} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \Psi_k^*(t) dt$$

$$\text{avec } \lambda_k = \langle \Psi_k, \Psi_k \rangle = \|\Psi_k\|^2$$

- Si les fonctions sont orthonormales: $\lambda_k = 1$

2.3 Développement en série de fonctions orthogonales

$$||e||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^m |\alpha_k|^2 \cdot \lambda_k \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m |\alpha_k|^2 \cdot \lambda_k \leq ||x||^2 = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

En augmentant m , l'erreur d'approximation diminue.

L'approximation $\tilde{x}(t)$ converge vers $x(t)$ en moyenne quadratique.

A la limite:

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \lambda_k \quad \text{IDENTITE DE PARSEVAL}$$

Définition: L'ensemble des fonctions orthogonales $\Psi_k(t)$ est dit **complet** s'il est possible d'approximer n'importe quelle fonction $x(t) \in L^2$ avec une erreur quadratique moyenne $\rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$.



2.4 Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit $\Psi_k(t)$, $k = 1 \dots m$ la base orthogonale recherchée

Soit $\nu_k(t)$ un ensemble de m fonctions linéairement indépendantes

$$\text{Gram-Schmidt : } \Psi_j(t) = \frac{w_k(t)}{\|w_k(t)\|}$$

Avec $w_1(t) = \nu_1(t)$

$$w_k(t) = \nu_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \nu_k, \Psi_i \rangle \Psi_i(t)$$

2.5 Quelques ensembles de fonctions orthogonales

- Impulsions rectangulaires décalées

$$\Psi_k(t) = \text{rect}\left(\frac{t - k\Delta\tau}{\Delta\tau}\right)$$

Orthogonale ?

$\lambda_k =$

$\alpha_k =$

complet ?



2.5 Quelques ensembles de fonctions orthogonales

- Fonctions sinusoïdales

$$\Psi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

Orthonormale sur $[0, T]$

complet ?

2.5 Quelques ensembles de fonctions orthogonales

- Série de Fourier

Tout signal $x(t) \in L^2(t_1, t_1 + T)$ peut être exprimé par une combinaison linéaire d'exponentielles complexes:

$$\Psi_n(t) = e^{\frac{j2\pi nt}{T}} \text{ et } \lambda_n = T$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{\frac{j2\pi nt}{T}} \\ X_n &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) e^{-\frac{j2\pi nt}{T}} dt \end{aligned}$$



Joseph Fourier (1768-1830)

2.5 Quelques ensembles de fonctions orthogonales

- En plus:

$$\begin{aligned} x(t + mT) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{\frac{j2\pi n(t+mT)}{T}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{\frac{j2\pi nt}{T}} e^{\frac{j2\pi nmT}{T}} = x(t) \end{aligned}$$

- La Série de Fourier d'un signal périodique de période T est la même que la série de Fourier d'un signal de durée T correspondant à une période du signal périodique.

Chapitre 3

Signaux déterministes

- 3.1 La Transformée de Fourier
- 3.2 Echantillonnage et reconstruction
- 3.3 Conversion A/D
- 3.4 Quantification et codage
- 3.5 Conversion D/A



3.1 La Transformée de Fourier

Soit $x(t, T) = x(t)$ pour $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$

$$x(t, T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt$$

Pour $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} x(t, T) \rightarrow x(t) \\ \Delta f = \frac{1}{T} \rightarrow df \\ f_n = \frac{n}{T} \rightarrow f \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Définition: $x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x(t, T)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt \right\}}_{\rightarrow X(f)} e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad \text{et} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$



3.1 La Transformée de Fourier

- Propriétés:

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-f)$$

$$ax(t) + by(t) \longleftrightarrow aX(f) + bY(f)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} \longleftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(f) \cdot Y(f)$$

$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow X(f) * Y(f)$$

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0)$$

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad \text{IDENTITE DE PARSEVAL}$$



3.1 La Transformée de Fourier

- Quelques TF particulières:

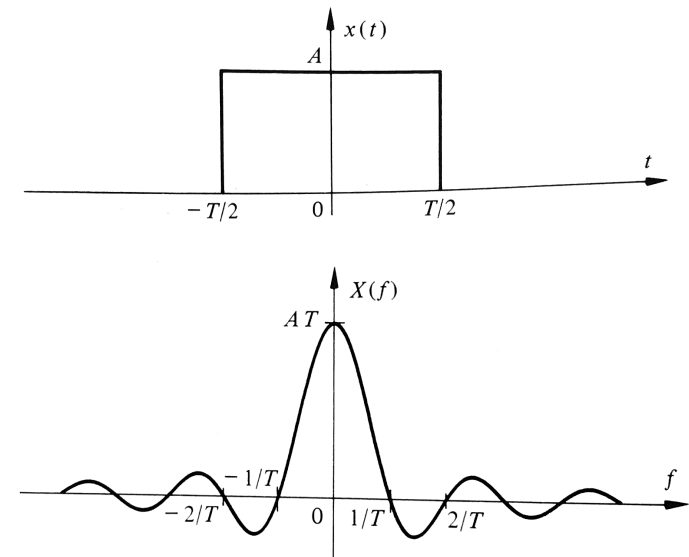
$$\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1$$

$$1 \longleftrightarrow \delta(f)$$

$$\delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f - f_0)$$

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow AT \text{sinc}(Tf)$$



3.1 La Transformée de Fourier

- Cas particulier des signaux périodiques

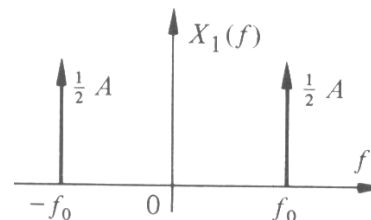
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \quad (\text{série de Fourier})$$

↓ par linéarité

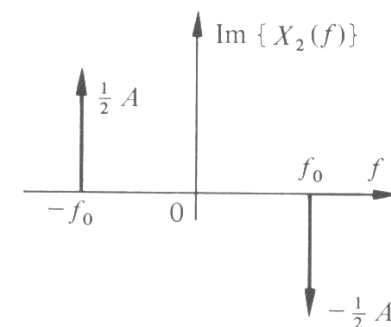
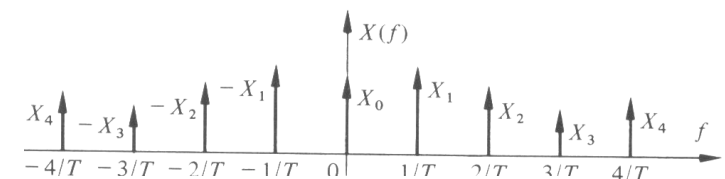
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - \frac{n}{T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - f_n)$$

- La TF d'un signal périodique a **un spectre de raies**.

Exemple : $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \alpha)$



$\alpha = 0 : x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$



$\alpha = \pi/2 : x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$

3.1 La Transformée de Fourier

- Exemple : le peigne de Dirac

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

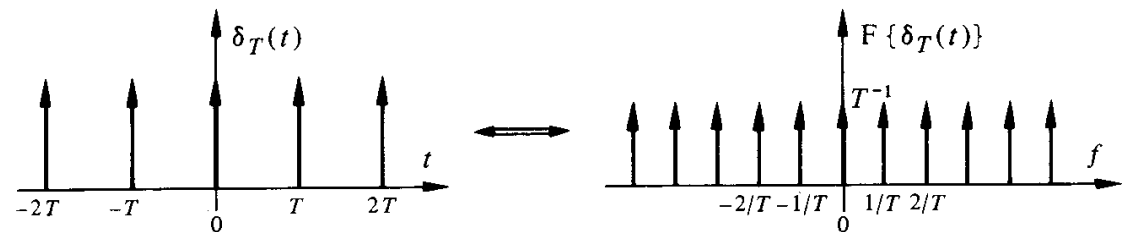
Sa série de Fourier est

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

$$\Delta_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)$$



Reproduit de «Théorie et traitement des signaux», F. de Coulon, PPUR

3.2 Echantillonnage et reconstruction

- T.F de signaux numériques
 - Soit $x(n)$ un signal numérique obtenu par échantillonnage d'un signal analogique $x_a(t)$:

$$x(n) = x_a(nT) \quad -\infty < n < \infty$$

$$\text{Fréquence d'échantillonnage : } F_e = \frac{1}{T}$$

$$t = nT = \frac{n}{F_e}$$

- Transformée de Fourier:

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

$$X(f) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fn}$$

$$\left. \begin{array}{l} t \leftrightarrow F \\ n \leftrightarrow f \end{array} \right\} t = \frac{n}{F_e} \Rightarrow f = \frac{F}{F_e}$$

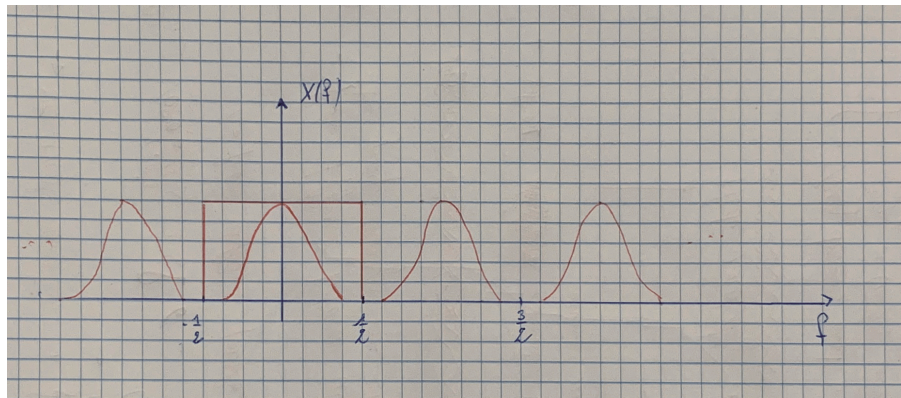
3.2 Echantillonnage et reconstruction

- Propriété: $X(f + 1) = \sum_n x(n)e^{-j2\pi n(f+1)} = \sum_n x(n)e^{-j2\pi nf} = X(f)$

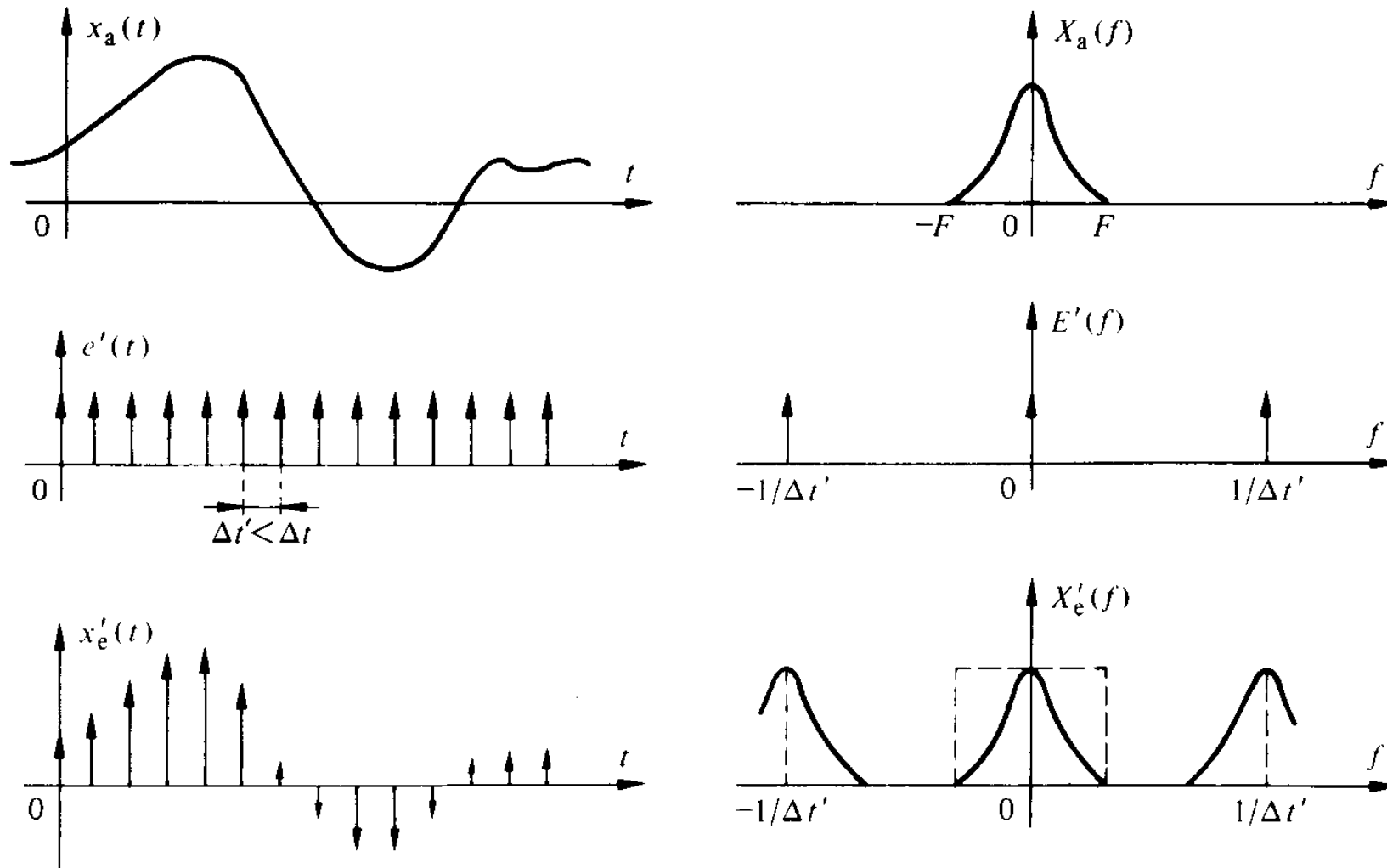
- La T.F. d'un signal numérique est périodique de période 1

- T.F. inverse : $x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi fn} df$

- analyse sur la fenêtre principale $[-1/2, 1/2]$

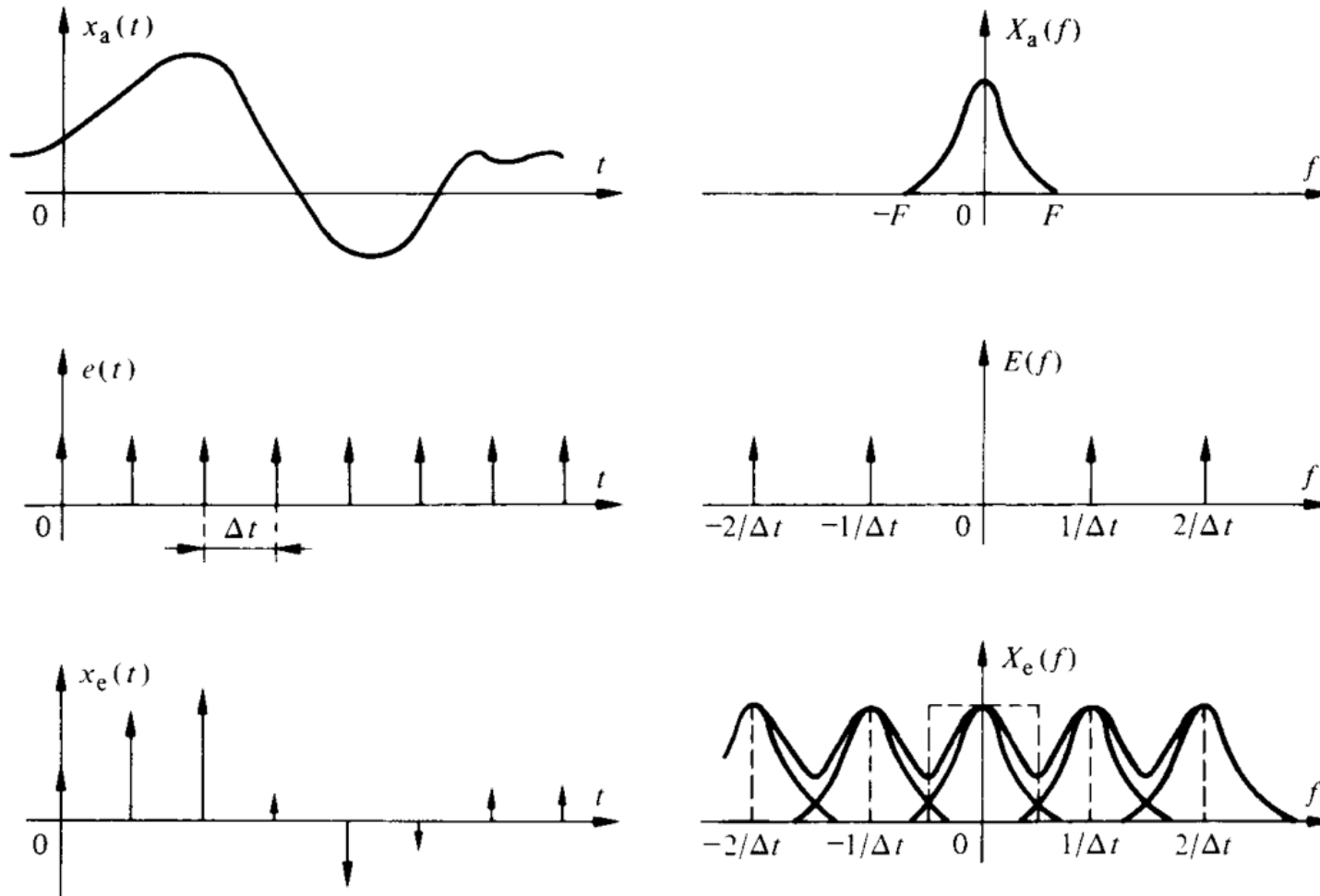


3.2 Echantillonnage et reconstruction



Reproduit de «Traitement numérique des signaux», M. Kunt, PPUR

3.2 Echantillonnage et reconstruction

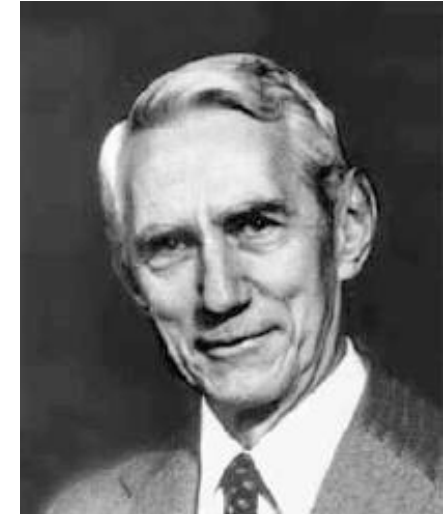


Reproduit de «Traitement numérique des signaux», M. Kunt, PPUR

3.2 Echantillonnage et reconstruction

- **Théorème de l'échantillonnage:**

- Claude E. Shannon (1916 - 2001)

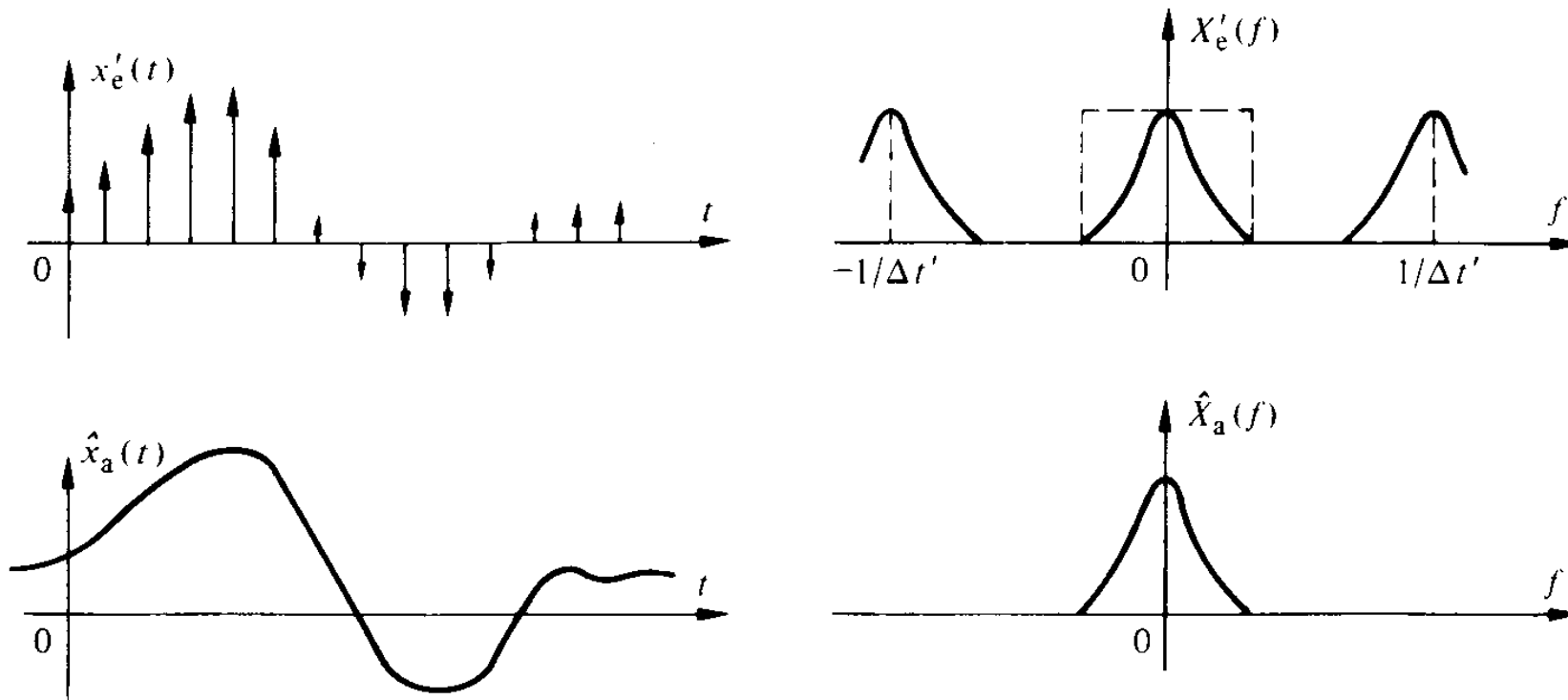


Soit un signal analogique $x_a(t)$ de largeur de bande F (Hz).
 $x_a(t)$ peut être reconstruit parfaitement à partir de ses échantillons $x_a(nT)$ si $f_e \geq 2F$

- échantillonnage «à la fréquence de **Nyquist**»
- condition suffisante ? nécessaire ?

3.2 Echantillonnage et reconstruction

- Reconstruction idéale



Reproduit de «Traitement numérique des signaux», M. Kunt, PPUR

3.2 Echantillonnage et reconstruction

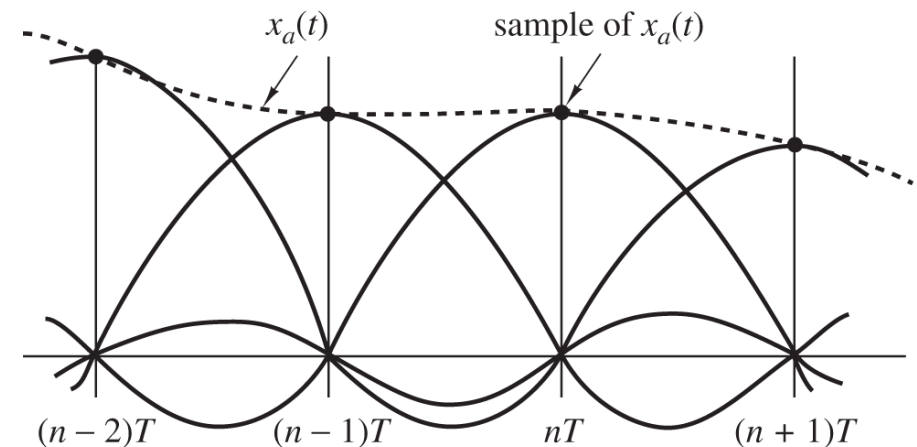
- Reconstruction idéale

$X_a(f) = X_e(f) \cdot G(f)$ $G(f)$ rectangle de fréquence de coupure $f_c = f_e/2$

$$x_a(t) = x_e(t) * g(t)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}$$

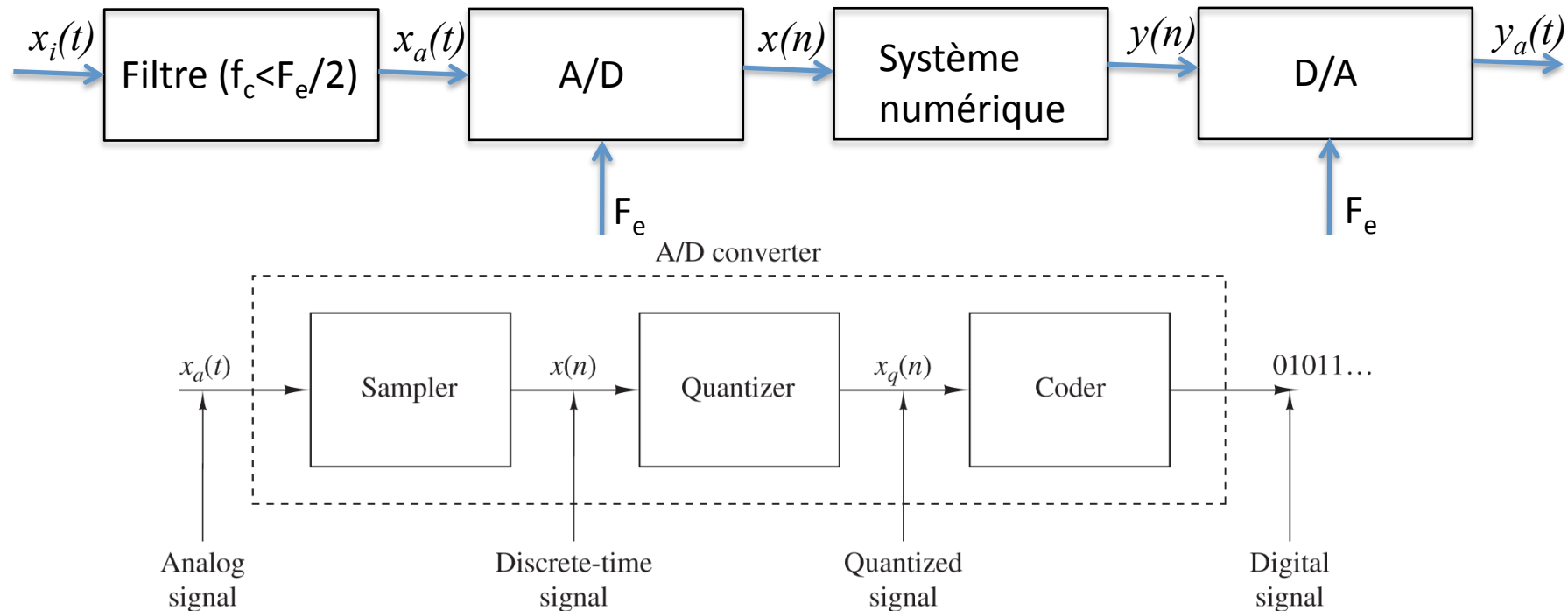


- Exemple : téléphone :

- voix : 300-3400 Hz
- f_e : 8kHz

3.3 Conversion A/D

- Système numérique



- échantillonnage idéal: $x_e(t) = x_a(t) \cdot e(t)$

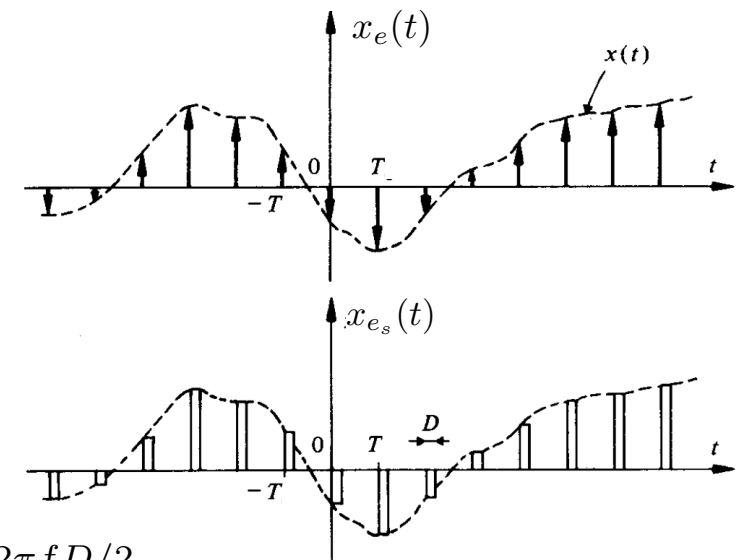
$$\text{avec } e(t) = \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

3.3 Conversion A/D

- échantillonnage réel : échantillonnage avec maintien
 - échantillonneur - bloqueur, «sample and hold » (S&H)

$$x_{e_s}(t) = [x_a(t) \cdot \delta_T(t)] * g(t)$$

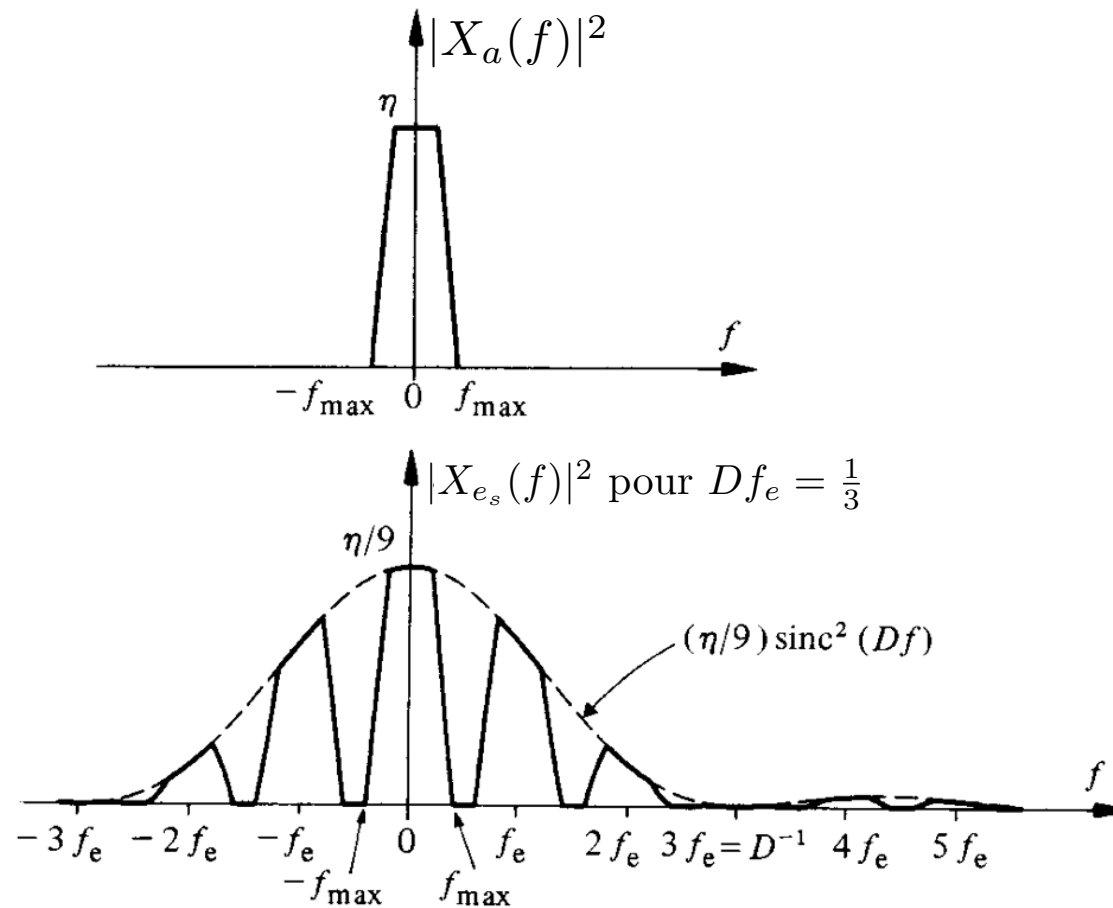
$$\text{avec } g(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{D}{2}}{D}\right)$$



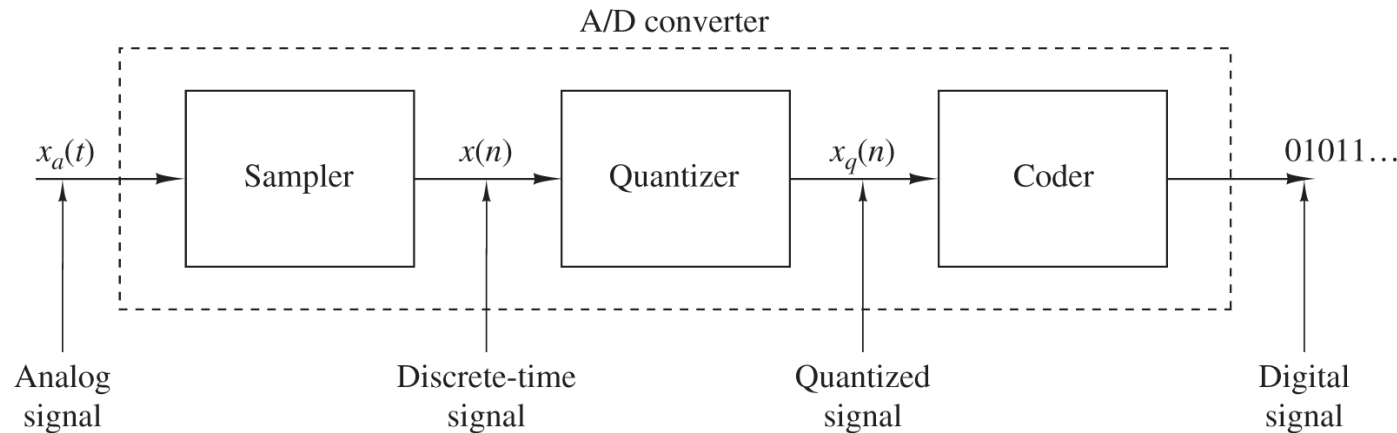
$$\begin{aligned} \Rightarrow X_{e_s}(f) &= [X_a(f) * \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)] \cdot G(f) \\ &= X_e(f) \cdot D \text{sinc}(Df) e^{-j2\pi f D/2} \\ &= \frac{1}{T} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - \frac{n}{T}) \right] D \text{sinc}(Df) e^{-j2\pi f D/2} \end{aligned}$$

3.3 Conversion A/D

- échantillonnage réel : échantillonnage avec maintien



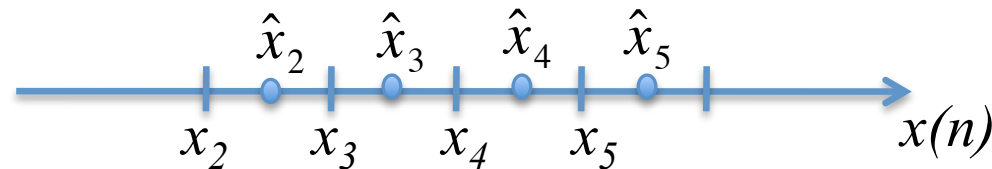
3.4 Quantification et codage



- Amplitudes continues $\rightarrow$ discrètes, codées
 - on divise l'échelle des amplitudes en L intervalles I_k : $x(n) = x_a(nT) \rightarrow \hat{x}_k$

$$I_k = \{x_k < x(n) \leq x_{k+1}\}, k = 1 \dots L$$
 - avec $L+1$ niveaux de décision $x_1 \dots x_{L+1}$ et L niveaux de quantification $\hat{x}_k$

$$\text{avec } x_q(n) = Q[x(n)] = \hat{x}_k \text{ si } x(n) \in I_k$$



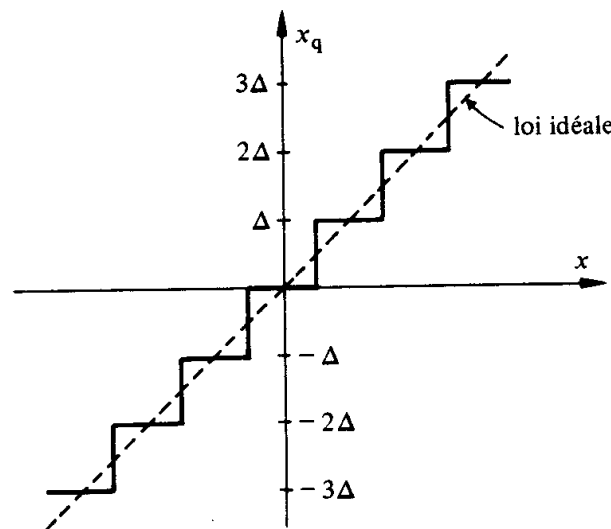
3.4 Quantification et codage

- Un exemple classique : quantification uniforme

$$\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k = \Delta = x_{k+1} - x_k$$

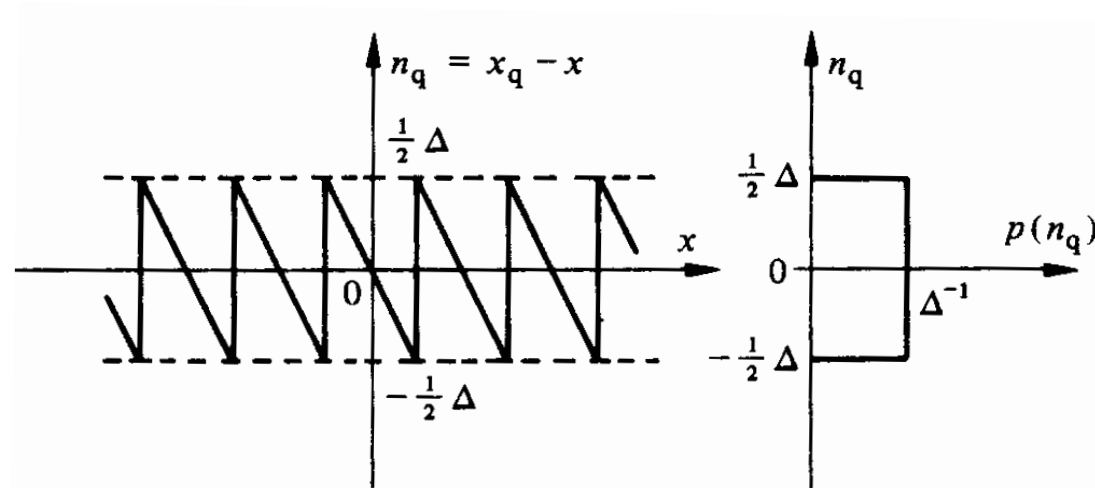
Δ est le pas de quantification

- En théorie, la gamme dynamique peut être infinie : $x_1 = -\infty$ et $x_{L+1} = \infty$
- En pratique, on définit la gamme dynamique R du quantificateur



3.4 Quantification et codage

- Un exemple classique : quantification uniforme
 - Codage : b bits pour représenter les L niveaux $\rightarrow 2^b \geq L \rightarrow \Delta = \frac{R}{2^b}$
 - L'erreur de quantification est $-\frac{\Delta}{2} \leq n_q(n) \leq \frac{\Delta}{2}$



3.4 Quantification et codage

- Un exemple classique : quantification uniforme
 - Sous certaines hypothèses ($n_q(n)$ uniforme sur $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$ et à moyenne 0)

$$SQNR = 10 \log_{10} \frac{P_x}{P_{n_q}}$$

$$P_{n_q} = \sigma_{n_q}^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} n_q^2 p(n_q) dn_q = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} n_q^2 dn_q = \frac{\Delta^2}{12}$$

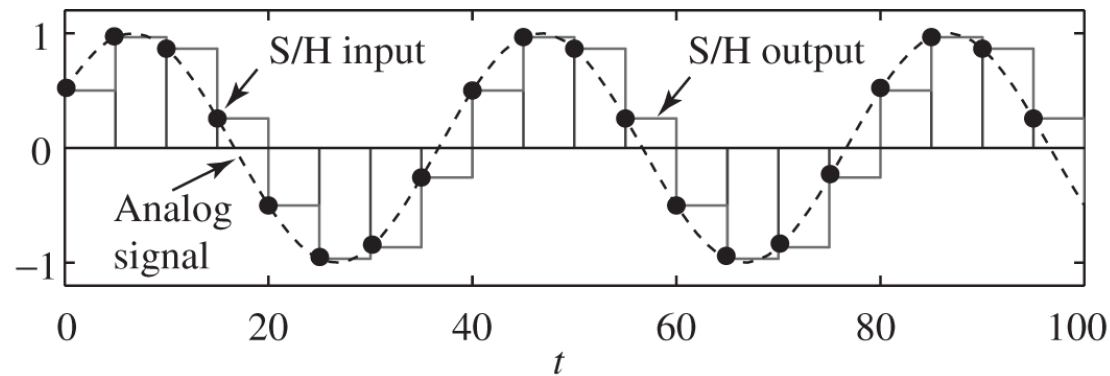
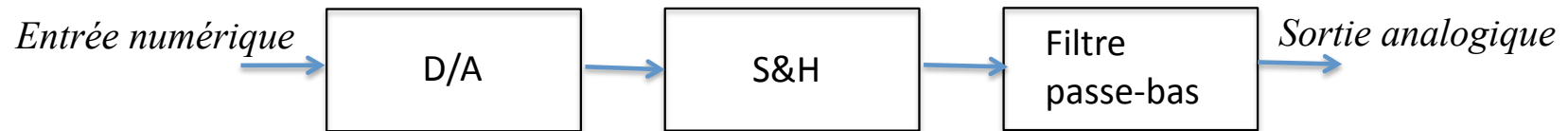
$$SQNR = 20 \log_{10} \frac{\sigma_x}{\sigma_{n_q}} = 20 \log_{10} \frac{\sigma_x 2^b \sqrt{12}}{R} \approx 6b + 10.8 - 20 \log_{10} \frac{R}{\sigma_x} \quad [dB]$$

- Donc, un signal quantifié de façon uniforme sur b bits voit son rapport signal sur bruit de quantification (SQNR) augmenter linéairement de **6 dB** avec chaque bit supplémentaire.

Exemple : pour un signal sinus d'amplitude A qui couvre toute la gamme dynamique ($R = 2A$), on a $SQNR = 6b + 1.76 \quad [dB]$

3.5 Conversion D/A

- Réalisation pratique :

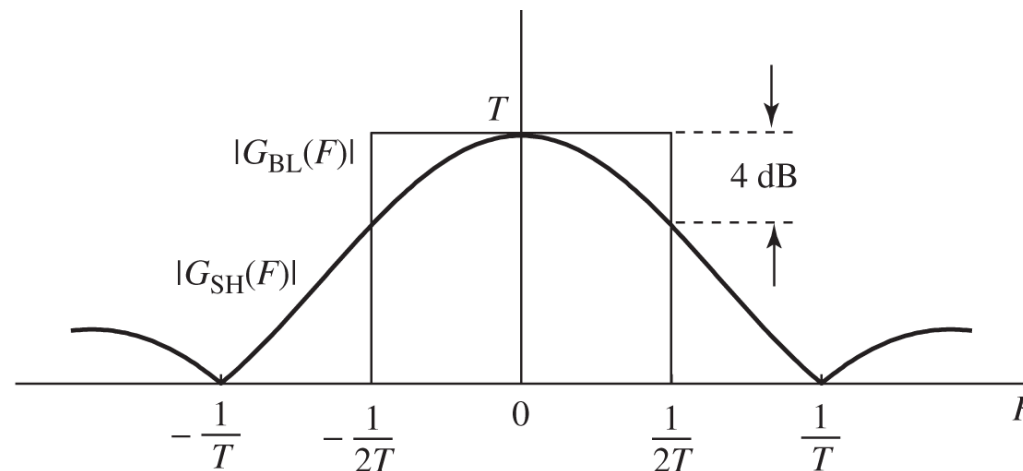


3.5 Conversion D/A

- La fonction d'interpolation n'est en pratique pas le sinc idéal. Elle est :

$$g_{SH}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\rightarrow G_{SH}(f) = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} e^{-j2\pi f T/2}$$



Chapitre 4

La Transformée de Fourier Discrète (TFD)

- 4.1. Introduction à la TFD
- 4.2. Définition de la TFD
- 4.3. Principales propriétés de la TFD
- 4.4. TFD de signaux à durée illimitée
- 4.5. Transformée de Fourier Rapide
- 4.6. Corrélation - densité spectrale d'énergie
- 4.7. Corrélation - densité spectrale de puissance



4.1. Introduction à la TFD

- La Transformée de Fourier vue au chapitre 3 n'est pas un outil parfait pour le traitement des signaux **numériques**:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi f k} \quad x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f k} df$$

- variable continue **f**
- nombre d'échantillons **infini**
- On introduit donc une notion plus pratique : la TFD**
 - pour les signaux périodiques
 - pour les signaux à durée déterminée
 - limitation des signaux à durée infinie
 - algorithme rapide : **FFT**



4.2. Définition de la TFD

• 4.2.1. : Discrétisation de la fréquence

$f = n\Delta f$ Δf incrément utilisé sur l'axe des fréquences.

- les fréquences $f_n = n\Delta f$ sont appelées les fréquences **harmoniques**.
- Puisque $X(f)$ est périodique de période 1, on peut se concentrer sur cette période. On va la diviser en **N intervalles** : $\Delta f = \frac{1}{N}$ et $f_n = \frac{n}{N}$

- Sur la période $[-1/2, 1/2]$, les N valeurs de la variable n sont :

$$n = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

- Dès lors, par cette discrétisation, les $x(k)$ sont **approximés** par

$$x_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X(n) e^{j2\pi \frac{n}{N} k} \approx x(k)$$

- Quelle est la qualité de cette approximation ??



4.2. Définition de la TFD

- Un terme important : $W_N \triangleq e^{j\frac{2\pi}{N}} \Rightarrow W_N^{nk} = e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$
- Propriétés:

Séparabilité: $W_N^{k+l} = W_N^k \cdot W_N^l$

Périodicité: $W_N^{k+lN} = W_N^k$ (l entier)

Valeurs spéciales: $W_N^{lN} = 1$

$$W_N^{N/2} = e^{j\pi}$$

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = e^{j2\pi\frac{k}{N}} \cdot e^{j\pi} = -W_N^k$$

$$W_N^2 = e^{2j\frac{2\pi}{N}} = e^{j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

Orthogonalité : $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = 1$ pour $k = lN$ (l entier)

$= 0$ sinon

4.2. Définition de la TFD

- Qualité de l'approximation discrète:

$$x_p(k + lN) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X(n) W_N^{(k+lN)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X(n) W_N^{kn} \cdot W_N^{lNn} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} X(n) W_N^{kn} = x_p(k)$$

- $x_p(k)$ est **périodique** de période N :
- Or $x(k)$ n'est pas supposé périodique !!! => **différence essentielle**.

4.2. Définition de la TFD

$$\begin{aligned}
 x_p(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) e^{-j2\pi \frac{ln}{N}} \right] e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{j2\pi \frac{n}{N} (k-l)} \right] \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) \left[\underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} W_N^{n(k-l)}}_{=1 \text{ en } l-k=iN \text{ (} i \text{ entier), 0 sinon}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow l = iN + k$$

$$x_p(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iN + k)$$

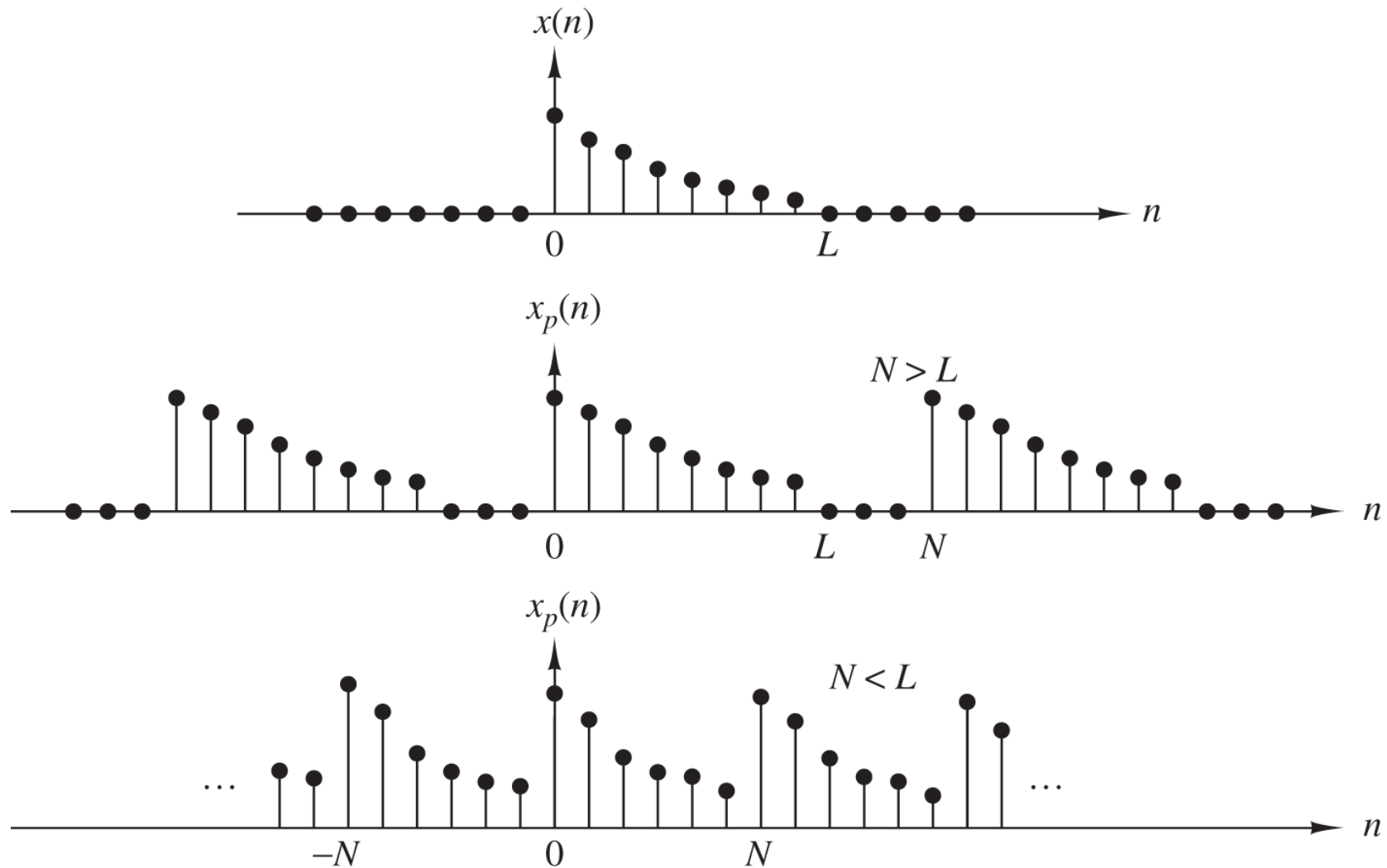
- $x_p(k)$ est obtenu par **répétition périodique** de $x(k)$ de période



4.2. Définition de la TFD

- La TF inverse aussi bien que directe d'une fonction échantillonnée est une fonction périodique de période inverse de la période d'échantillonnage.
- Donc, pour des signaux de durée limitée de longueur N , chaque période de $x_p(k)$ est la réplique exacte de $x(k)$.
- Si la durée du signal est $> N$, il y a recouvrement et on ne peut plus retrouver $x(k)$ à partir de $x_p(k)$

4.2. Définition de la TFD



4.2. Définition de la TFD

- 4.2.2. TFD des signaux à **durée limitée à N** :
 - On a donc:

$$X(f) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(k) e^{-j2\pi f k}$$

$$X(n) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \quad k = k_0 \dots k_0 + N - 1$$

$$X(n) = |X(n)| e^{j\Theta_X(n)}$$

4.2. Définition de la TFD

- 4.2.3. TDF de signaux **périodiques de période N**
 - Les développements précédents s'appliquent parfaitement à des signaux périodiques $x_p(k)$ de période N :

$$X_p(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x_p(k) e^{-j2\pi f k}$$

$$X_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_p(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$x_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X_p(n) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \quad k = -\infty \dots \infty$$

4.3. Principales propriétés de la TFD

- La plupart sont similaires à celles de la TF
- Linéarité :

$$x(k) = ax_1(k) + bx_2(k) \quad N_1 \text{ durée de } x_1(k) \text{ et } N_2 \text{ durée de } x_2(k)$$

$$X(n) = aX_1(n) + bX_2(n), \quad \text{de durée } N = \max(N_1, N_2).$$

- pour les signaux périodiques, il faut que les périodes soient les mêmes.

- Corrélation et convolution de **signaux périodiques de même période N**:

$$\phi_{x_p y_p}(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_p(k) y_p(l+k)$$

périodique de période N

$$\Phi_{x_p y_p} = \frac{1}{N} X_p^*(n) Y_p(n)$$

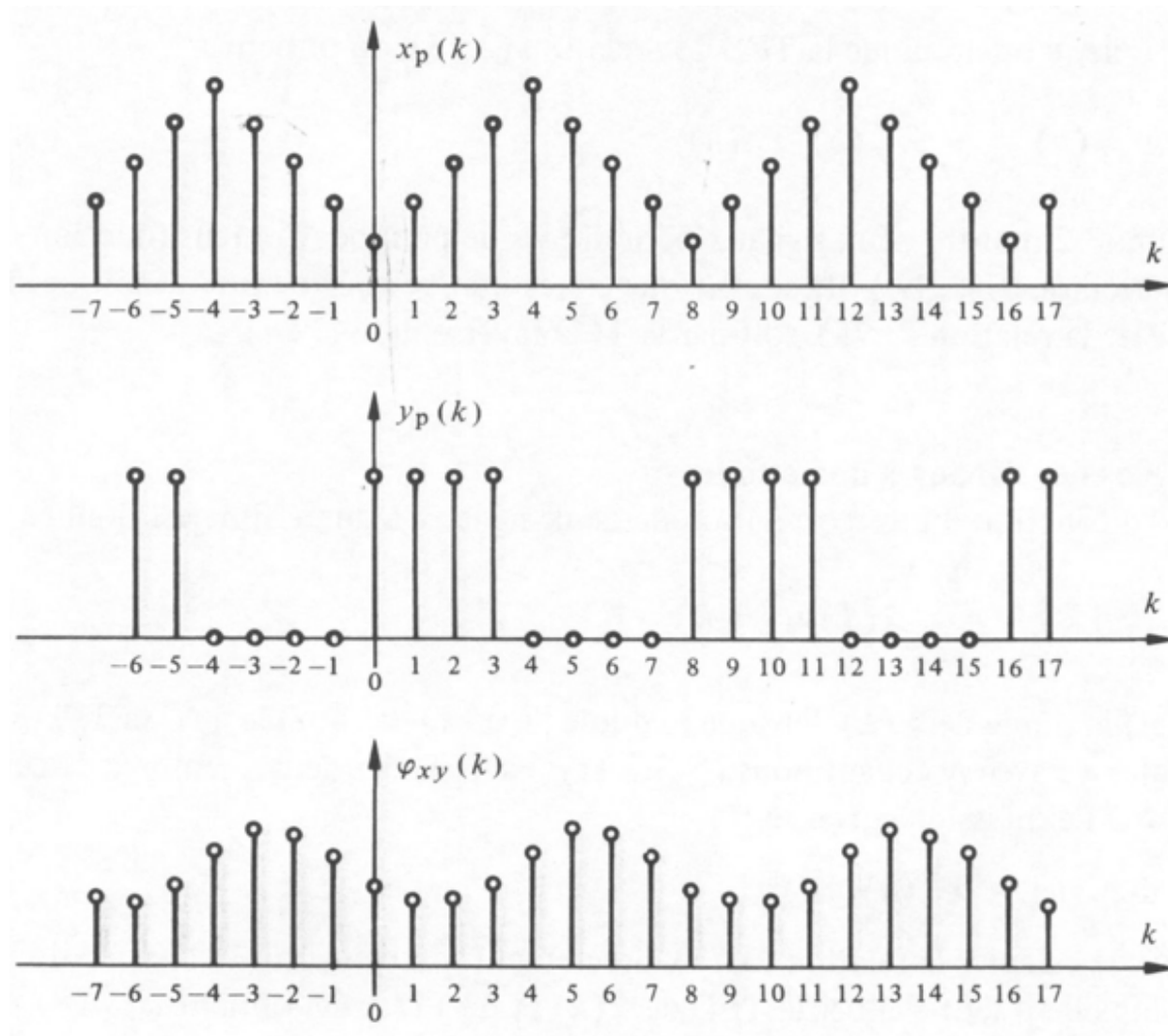
$$y_p(k) = x_p(k) * g_p(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x_p(k) g_p(k-l)$$

périodique de période N

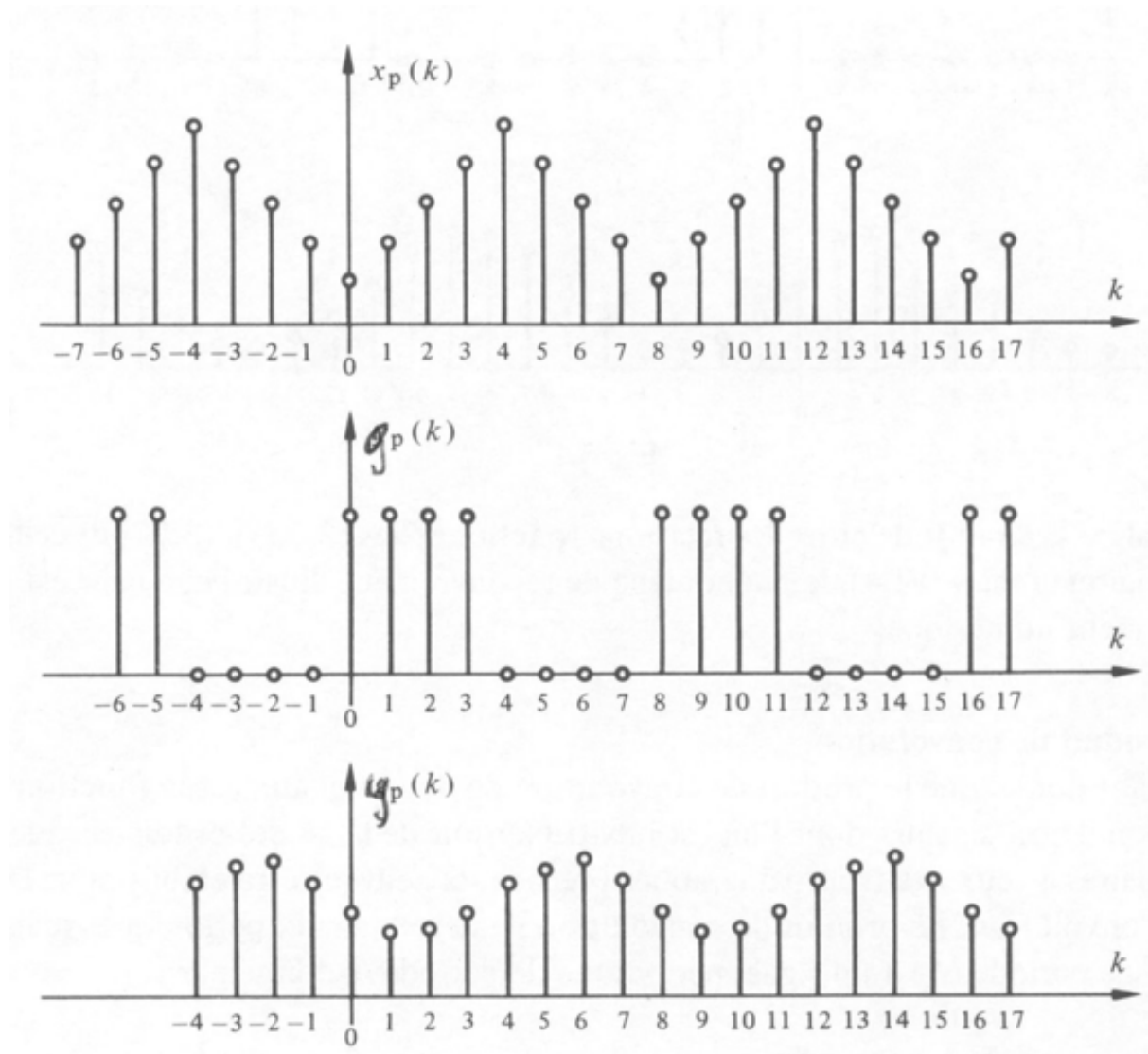
$$Y_p(n) = X_p(n) G_p(n)$$



4.3. Principales propriétés de la TFD



4.3. Principales propriétés de la TFD



4.3. Principales propriétés de la TFD

- TDF de signaux à durée déterminée
 - Corrélation de signaux à durée déterminée

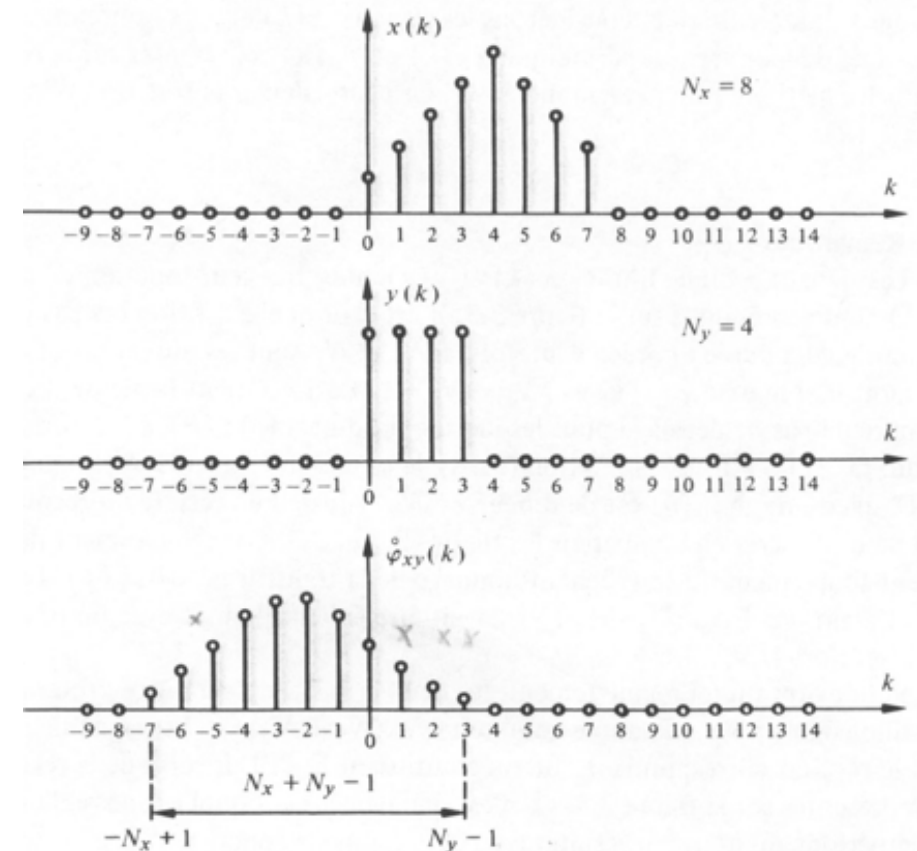
N_x la durée de $x(k)$, N_y la durée de $y(k)$

$$\phi_{xy}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)y(l+k)$$

Signal à durée déterminée : $N = N_x + N_y - 1$

$$\Phi_{xy} = X^*(n)Y(n)$$

- Il faut faire la TFD avec N_x+N_y-1 points !!!!



4.3. Principales propriétés de la TFD

- Convolution de **signaux à durée déterminée**

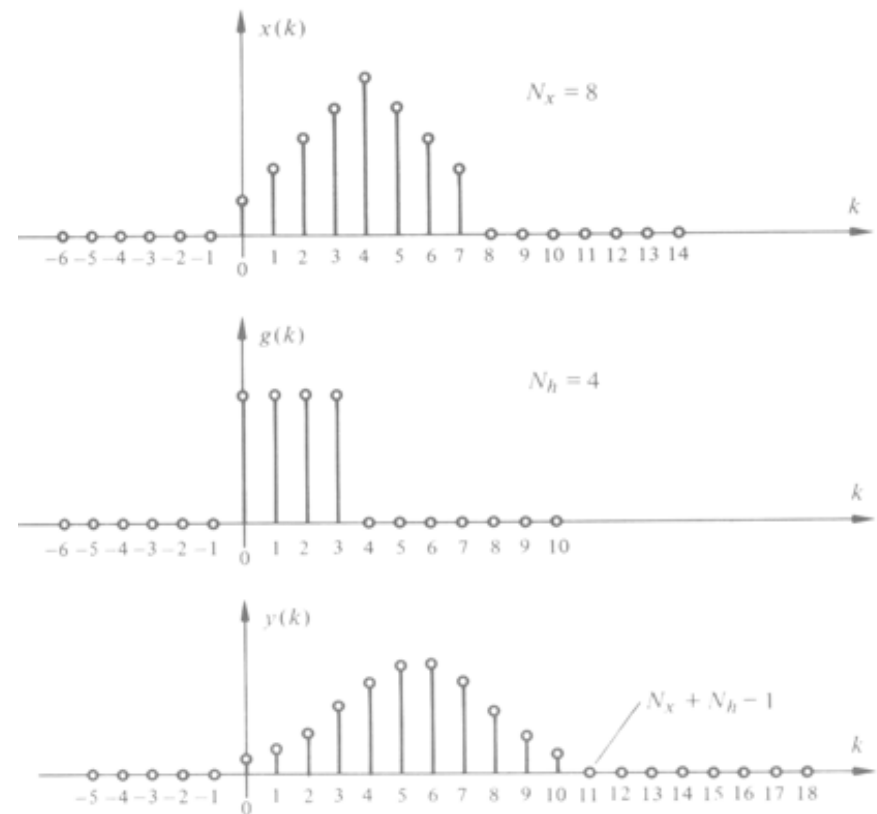
N_x la durée de $x(k)$, N_g la durée de $g(k)$

$$y(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)g(k-l)$$

Signal à durée déterminée : $N = N_x + N_g - 1$

$$Y(n) = X(n)G(n)$$

- **Il faut faire la TFD avec $N_x + N_g - 1$ points !!!!**



4.3. Principales propriétés de la TFD

- Convolution (et corrélation) sectionnées
 - Convolution d'un signal $x(k)$ très long par un signal $g(k)$ court.
 - Ex : ECG, echo radar, signal de parole, etc.
 - Méthode de l'addition sectionnée: partageons $x(k)$ en K sections de longueur M

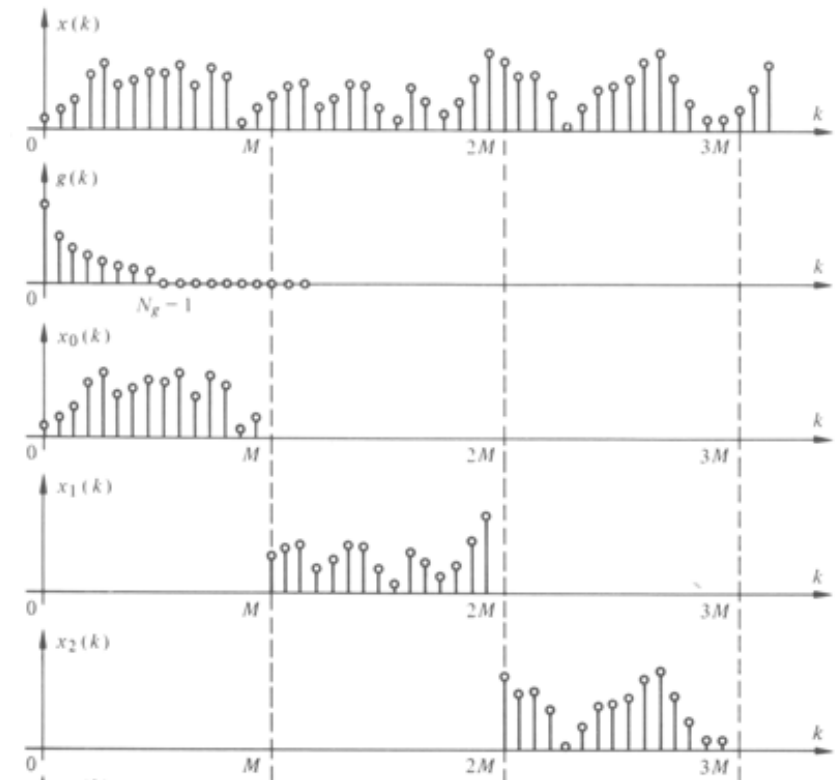
$$x_m(k) = x(k) \text{ pour } mM \leq k \leq (m+1)M - 1$$

$$x(k) = \sum_{m=m_0}^{m_0+K-1} x_m(k)$$

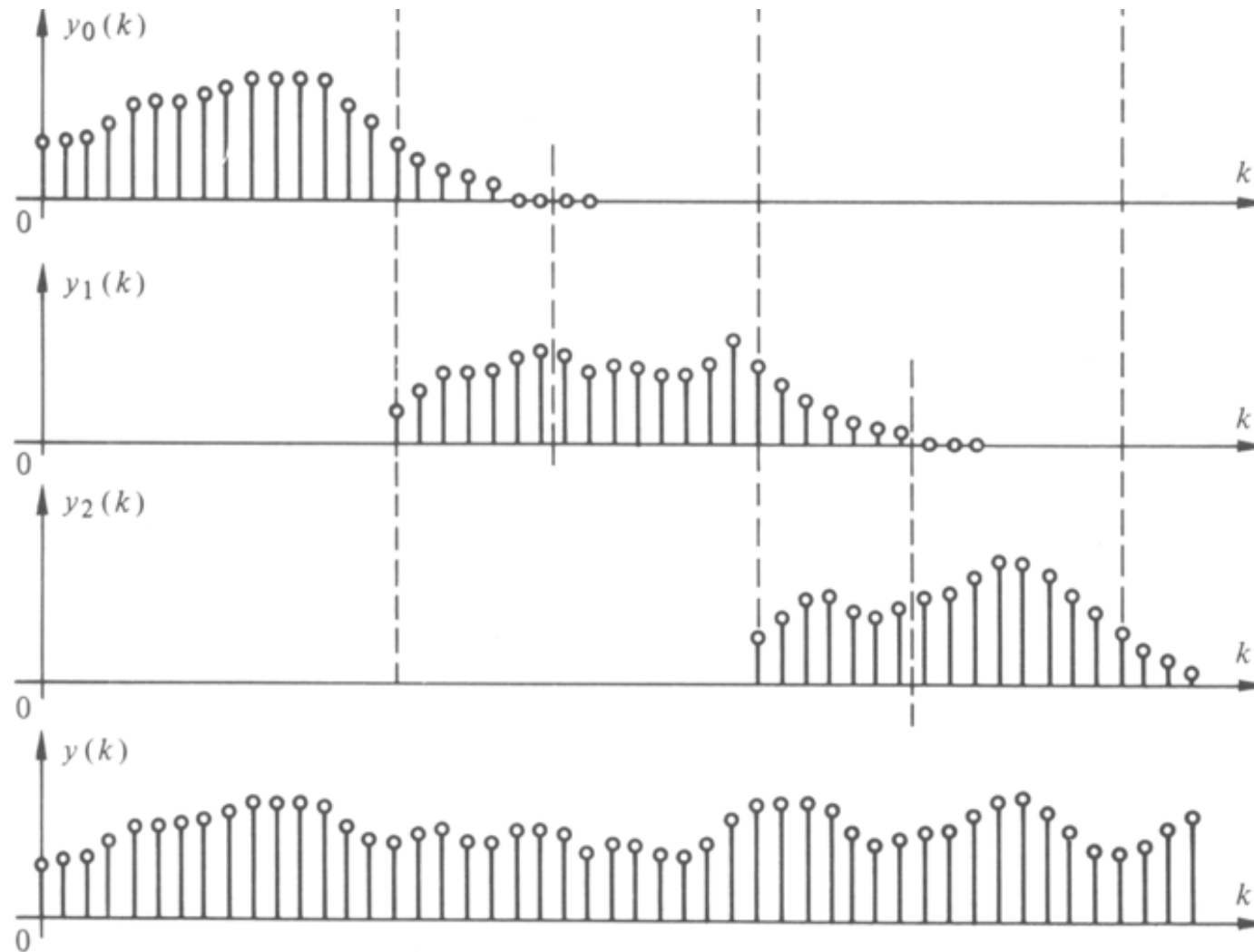
$$y(k) = \sum_n x(n)g(k-n) = \sum_n \sum_m x_m(n)g(k-n)$$

$$= \sum_{m=m_0}^{m_0+K-1} y_m(k)$$

$$\text{avec } y_m(k) = x_m(k) * g(k)$$



4.3. Principales propriétés de la TFD



4.4. TFD de signaux à durée illimitée

- Pour les signaux à durée limitée et pour les signaux périodiques, la TFD s'applique sans perte d'information.
 - Il n'en va pas de même pour les signaux à durée illimitée.
 - On va donc devoir en **limiter la durée**.
 - On aura donc une **approximation** de la TFD du signal original.
-
- 4.4.1. Limitation par une **fenêtre rectangulaire**
 - c'est la façon la plus intuitive de limiter un signal:

$$x_N(k) = \begin{cases} x(k) & \text{pour } |k| \leq N/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$x_N(k) = x(k) \cdot \text{rect}_N\left(k + \frac{N}{2}\right)$$

4.4. TFD de signaux à durée illimitée

- La TF en est $X_N(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(g) \cdot W_R(f - g) dg$
- Les coefficients de $X_N(f)$ ne représentent qu'approximativement ceux de $X(f)$. **Quelle est la qualité de cette approximation ?**

- $$W_R(f) = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} 1 \cdot e^{-j2\pi f k} = \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}$$

- Pour cette fenêtre, on a

$$\left| \frac{W_R(0)}{W_R(1.5/N)} \right| = 4.5 \text{ pour } N=9$$

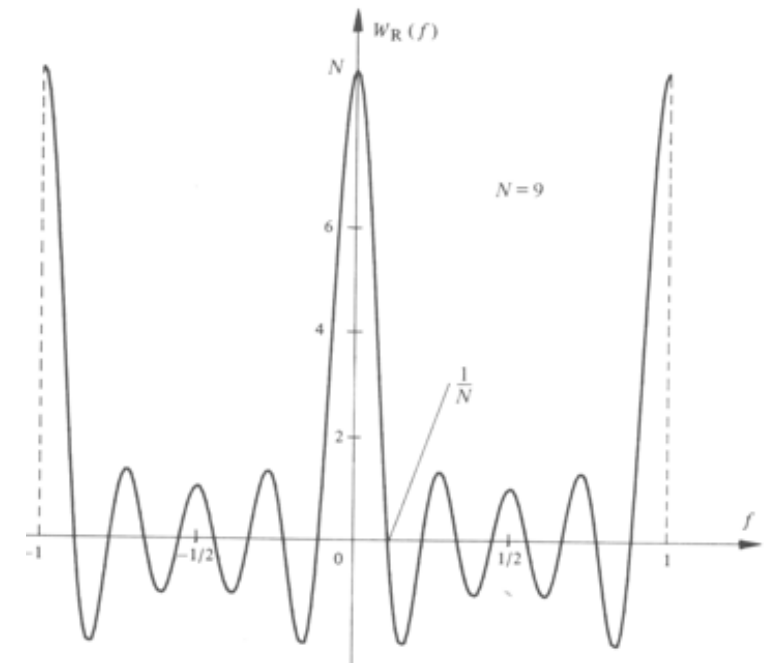
$$= 4.5 \text{ pour } N=9$$

$$= 4.705 \text{ pour } N=50$$

$$= 4.711 \text{ pour } N=100$$

$$= 4.12 \text{ pour } N \gg$$

$$\lambda_R = 20 \log \left| \frac{W_R(f_s)}{W_R(0)} \right| = -13 \text{ dB pour } N=9$$



4.4. TFD de signaux à durée illimitée

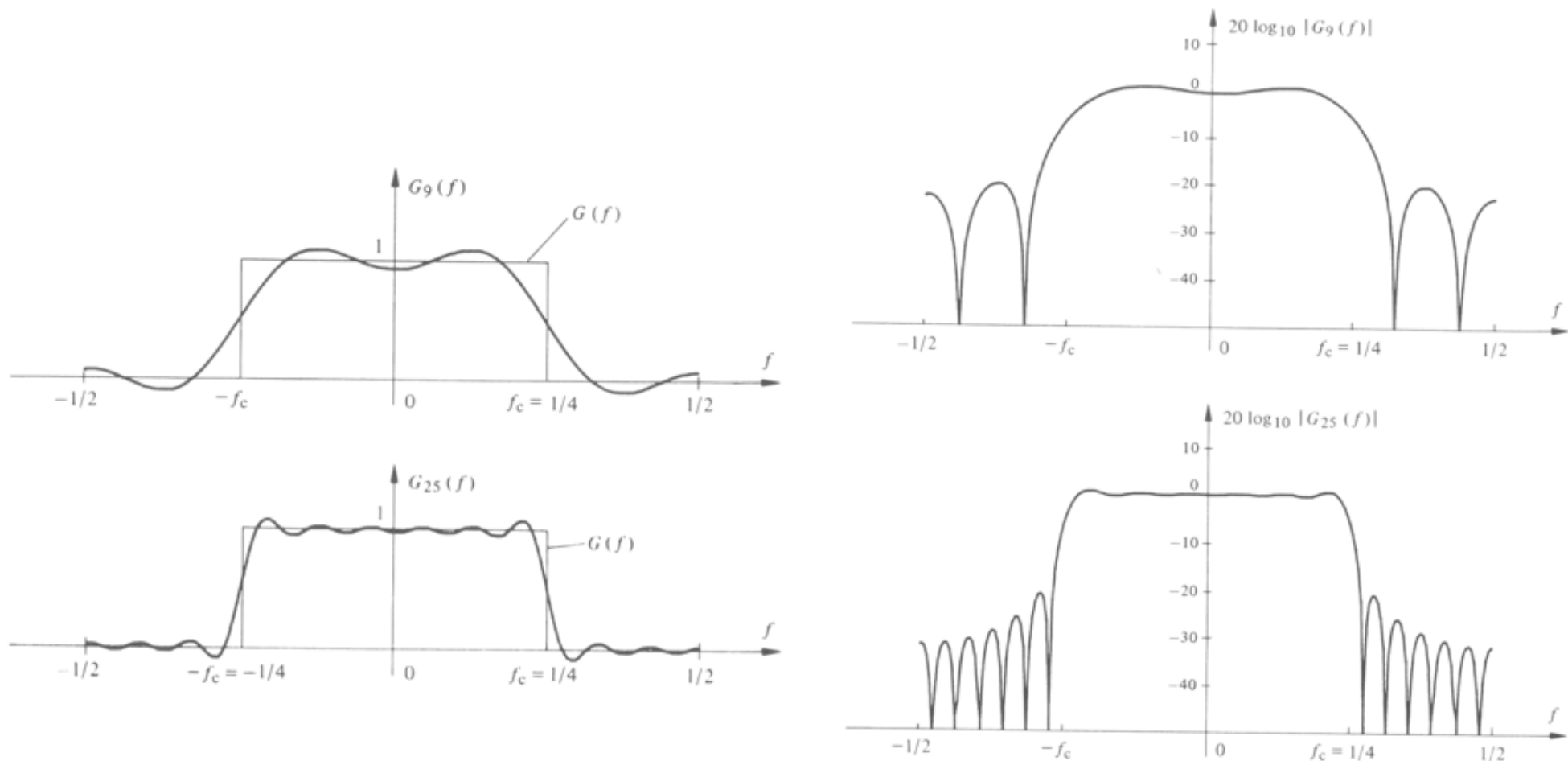
- Exemple : une réponse impulsionnelle

$$g(k) = \frac{\sin(2\pi f_c k)}{\pi k} \quad G(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| < f_c \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

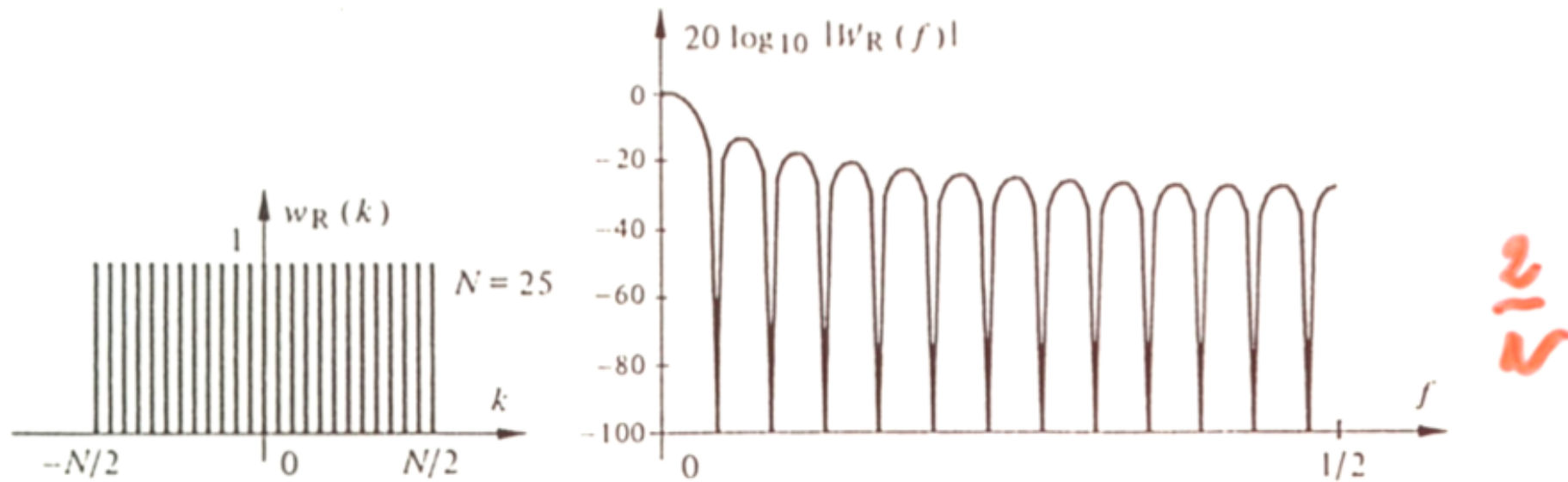
- elle est à durée illimitée -> approximation par $g_N(k) = g(k) \cdot w_R(k)$
 $w_R(k) = \text{rect}_N(k + \frac{N}{2})$

$$\begin{aligned} G_N(f) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G(g) \cdot \frac{\sin(\pi N(f - g))}{\sin(\pi(f - g))} dg \\ &= \int_{-f_c}^{f_c} \frac{\sin(\pi N(f - g))}{\sin(\pi(f - g))} dg \end{aligned}$$

4.4. TFD de signaux à durée illimitée



4.4. TFD de signaux à durée illimitée



$$\lambda_R = 20 \log \left| \frac{W_R(f_s)}{W_R(0)} \right| = -13 \text{ dB pour } N=9$$

4.4. TFD de signaux à durée illimitée

- 4.4.2. Généralisation à d'autres fenêtres
 - On va essayer de modifier la forme de la fenêtre, mais elle ne doit pas introduire de gain, de facteur multiplicatif dans le produit de convolution:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} W(f) df = 1 = w(0)$$

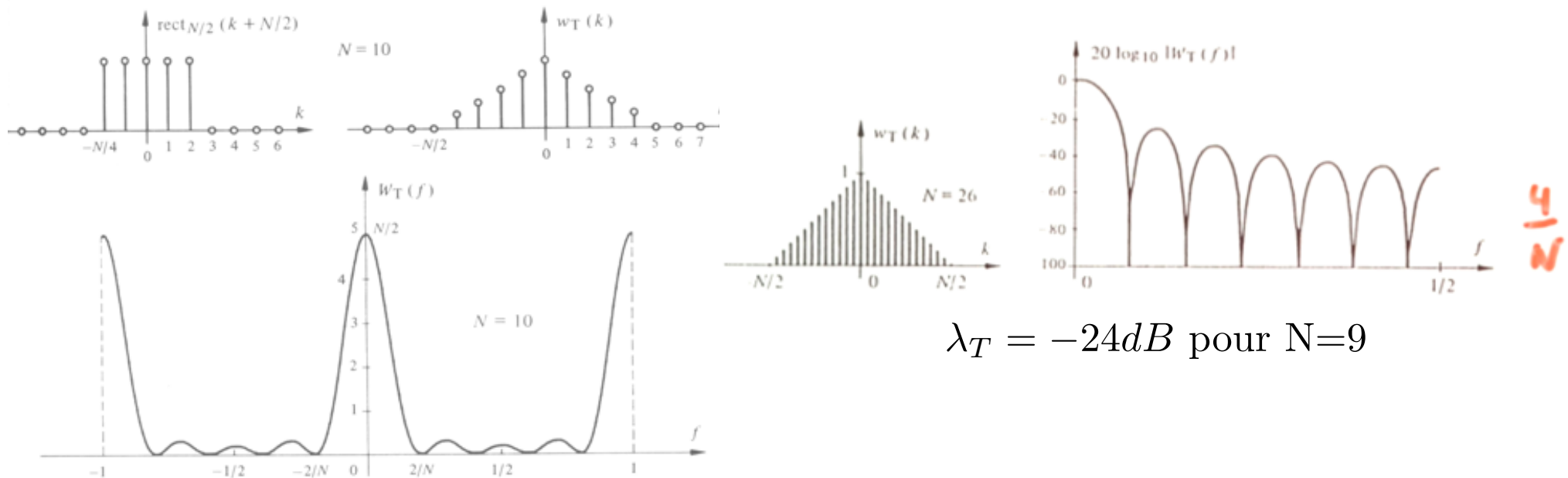
- Fenêtre triangulaire:** $W_T(f) = W_R(f) \cdot W_R(f)$

$$w_T(k) = \left(\frac{2}{N}\right) \text{rect}_{N/2}\left(k + \frac{N}{4}\right) * \text{rect}_{N/2}\left(k + \frac{N}{4}\right)$$

$$w_T(k) = \begin{cases} 1 - \frac{2|k|}{N} & \text{pour } |k| \leq N/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$W_T(f) = \frac{2}{N} \left(\frac{\sin(\pi f N/2)}{\sin(\pi f)} \right)^2 \quad \lambda_T = -24dB \text{ pour } N=9$$

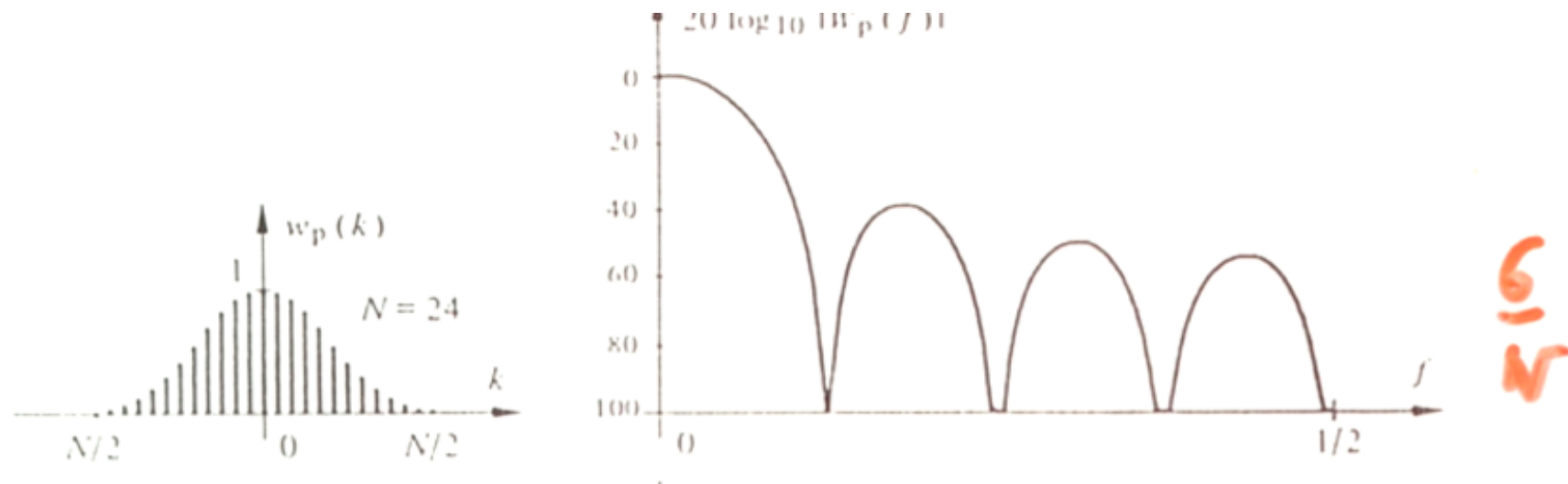
4.4. TFD de signaux à durée illimitée



4.4. TFD de signaux à durée illimitée

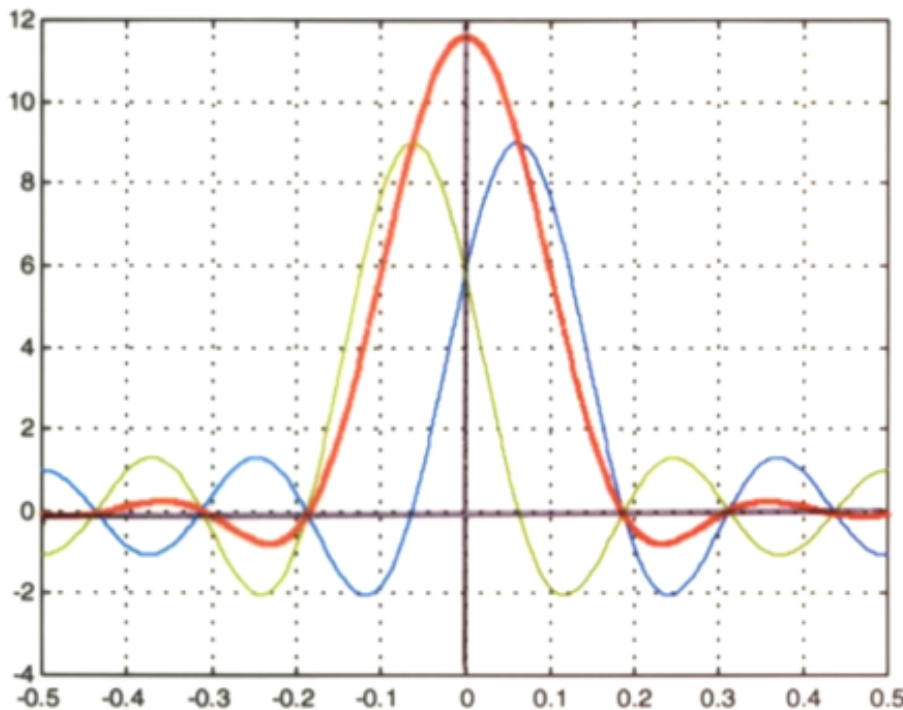
- Fenêtre parabolique:
$$W_p(f) = \frac{1}{A} \left(\frac{\sin(\pi f N/3)}{\sin(\pi f)} \right)^3$$

$$A \text{ t.q. } \int_{-1/2}^{1/2} w_p(f) df = 1$$



4.4. TFD de signaux à durée illimitée

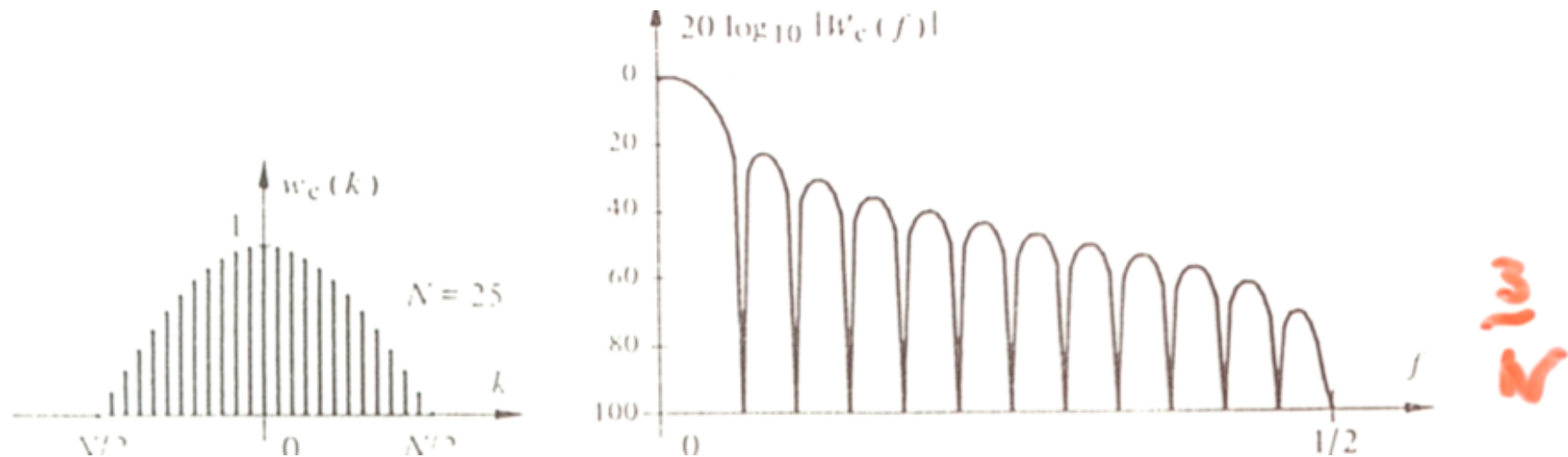
- **Fenêtre cosinusoidale:**
 - But : diminuer les lobes secondaires
 - Principe : les lobes latéraux de $W_R(f)$ alternent de signe et sont d'amplitude similaire. La somme de deux $W_R(f)$, décalées de $1/N$ ($1/2N$ à gauche et $1/2N$ à droite) devrait avoir des lobes secondaires très faibles



$$w_c(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} [e^{\frac{j2\pi k}{2N}} + e^{-\frac{j2\pi k}{2N}}] = \cos \frac{\pi k}{N} & \text{pour } |k| < \frac{N}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$W_c(f) = \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi N(f - \frac{1}{2N}))}{\sin(\pi(f - \frac{1}{2N}))} + \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi N(f + \frac{1}{2N}))}{\sin(\pi(f + \frac{1}{2N}))}$$

4.4. TFD de signaux à durée illimitée



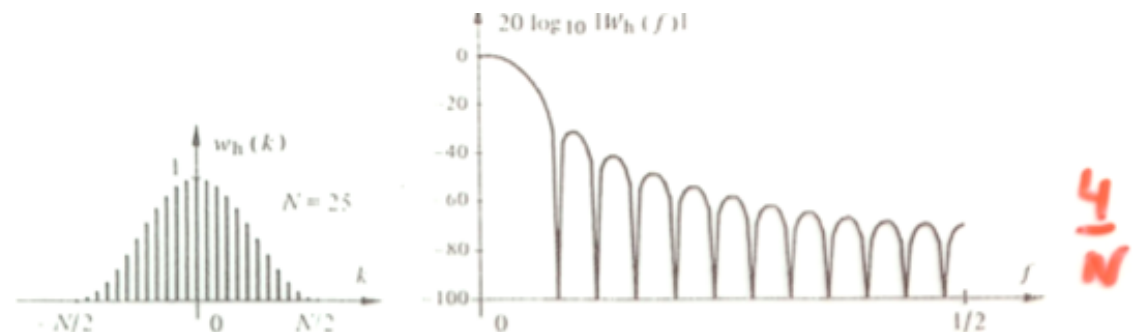
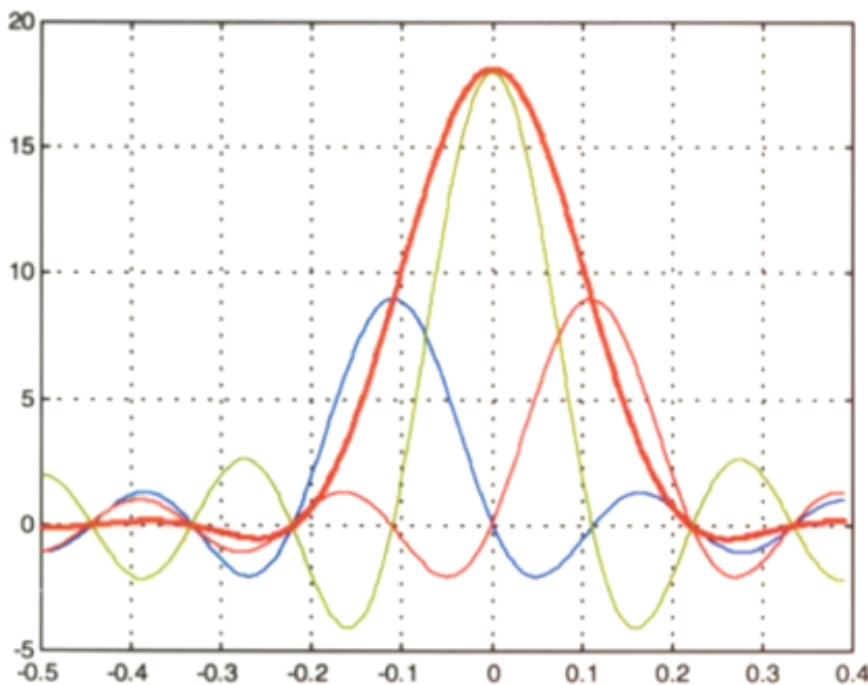
$$\lambda_c = -24dB \text{ pour } N=9$$

4.4. TFD de signaux à durée illimitée

- Fenêtres de Hanning:**

- Trois répliques décalées (en $-1/N$, 0 et $1/N$), avec une amplitude double au centre, pourraient faire encore mieux.

$$w_h(k) = \begin{cases} \frac{1}{4} [e^{\frac{j2\pi k}{N}} + 2 + e^{-\frac{j2\pi k}{N}}] = \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{2\pi k}{N}) & \text{pour } |k| < \frac{N}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



$$\lambda_h = -32dB \text{ pour } N=9$$

4.4. TFD de signaux à durée illimitée

- Fenêtres de Hamming généralisée:

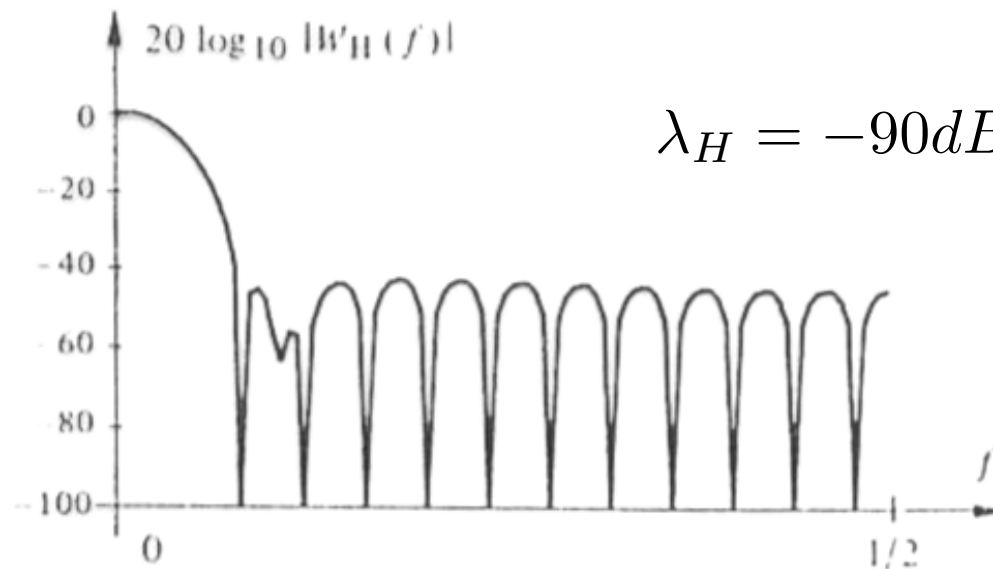
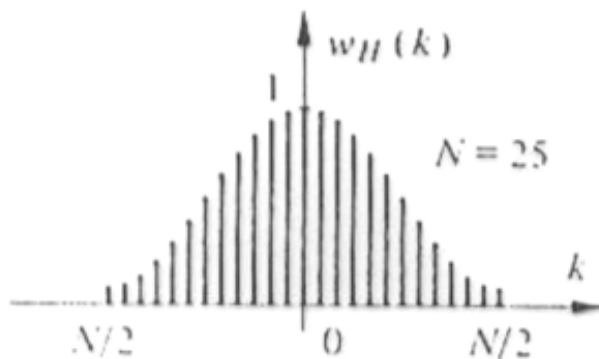
$$w_H(k) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi k}{N} & \text{pour } |k| < \frac{N}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} : \text{Hanning}$$

$$\alpha = 0.54 : \text{Hamming}$$

$$\alpha = 1 : \text{rectangle}$$

$$W_H(f) = \alpha \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)} + \frac{1 - \alpha}{2} \frac{\sin(\pi N(f - \frac{1}{N}))}{\sin(\pi(f - \frac{1}{N}))} + \frac{1 - \alpha}{2} \frac{\sin(\pi N(f + \frac{1}{N}))}{\sin(\pi(f + \frac{1}{N}))}$$



$$\lambda_H = -90dB \text{ pour } N=9$$

4.4. TFD de signaux à durée illimitée

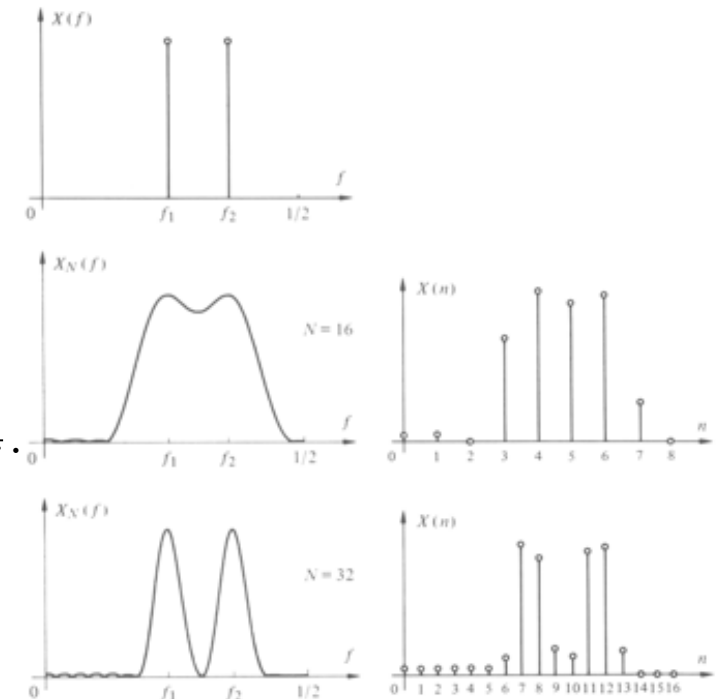
• 4.4.3. Choix de la durée N

- choix dans le domaine temporel : $x_p(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iN + k)$

- choix dans le domaine fréquentiel:

Si B_i représente la largeur du pic central de la fenêtre choisie $W_i(f)$, on a vu que $B_i = \frac{\gamma_i}{N}$

Si la résolution fréquentielle désirée est Δf , on doit choisir N tel que $B_i \leq \Delta f$, c'est-à-dire $N \geq \frac{\gamma_i}{\Delta f}$.



4.5. Transformée de Fourier Rapide

- La transformée de Fourier rapide = Fast Fourier Transform = FFT
- Il s'agit d'un **algorithme rapide** pour calculer la TFD

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{-nk}$$

$$X(0) = x(0)W_N^0 + x(1)W_N^0 + x(2)W_N^0 + \dots + x(N-1)W_N^0$$

$$X(1) = x(0)W_N^0 + x(1)W_N^{-1} + x(2)W_N^{-2} + \dots + x(N-1)W_N^{-(N-1)}$$

$$X(2) = x(0)W_N^0 + x(1)W_N^{-2} + x(2)W_N^{-4} + \dots + x(N-1)W_N^{-2(N-1)}$$

...

$$X(N-1) = x(0)W_N^0 + x(1)W_N^{-(N-1)} + x(2)W_N^{-2(N-1)} + \dots + x(N-1)W_N^{-(N-1)^2}$$

$$X = \begin{pmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ \dots & & & & \\ W_N^0 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} x$$

4.5. Transformée de Fourier Rapide

- Considérons le cas où $N = 2^m$
 - On peut donc partager $x(k)$ en deux suites:

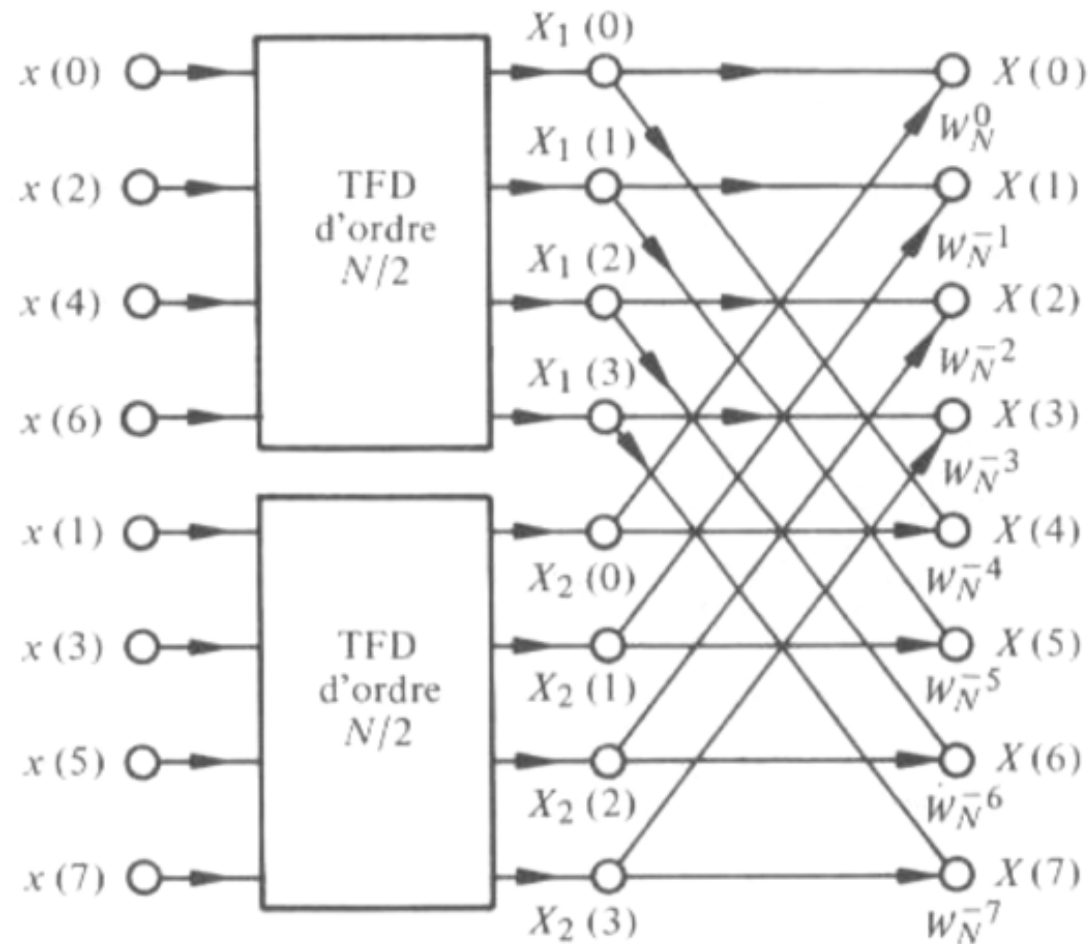
$$x_1(k) = x(2k)$$

$$x_2(k) = x(2k + 1)$$

$$\begin{aligned}
 X(n) &= x(0)W_N^0 + x(2)W_N^{-2n} + \dots + x(N-2)W_N^{-(N-2)n} \\
 &\quad + x(1)W_N^{-n} + x(3)W_N^{-3n} + \dots + x(N-1)W_N^{-(N-1)n} \\
 &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k)W_N^{-2kn} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2k+1)W_N^{-(2k+1)n} \\
 &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(k)W_{N/2}^{-kn} + W_N^{-n} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(k)W_{N/2}^{-kn} \\
 &= X_1(n) + W_N^{-n} X_2(n)
 \end{aligned}$$

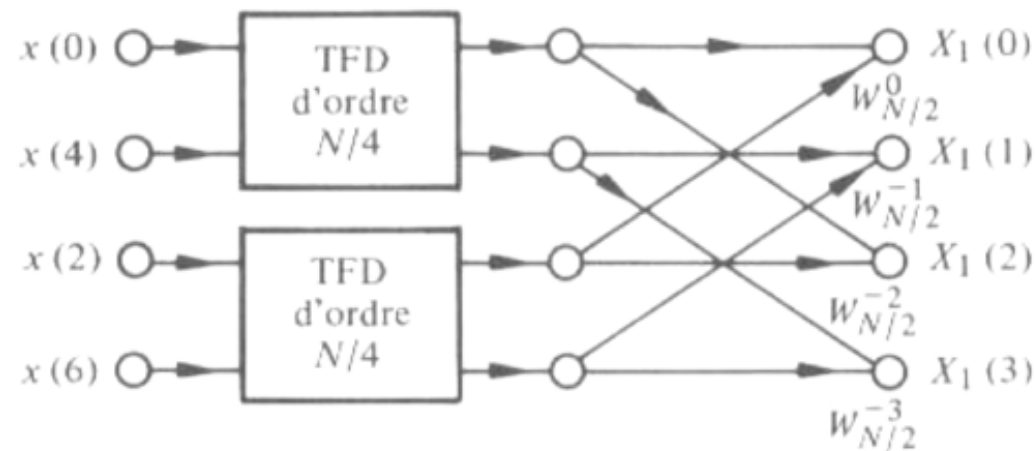
4.5. Transformée de Fourier Rapide

- Ex : $N=8$

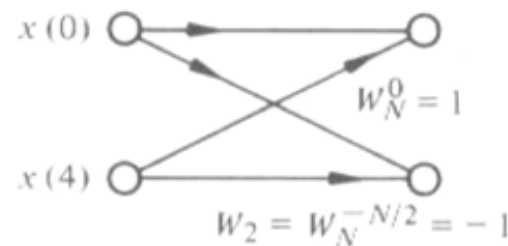


4.5. Transformée de Fourier Rapide

- Et on peut continuer : décomposer la TDF d'ordre $N/2$ en deux TFD d'ordre $N/4$

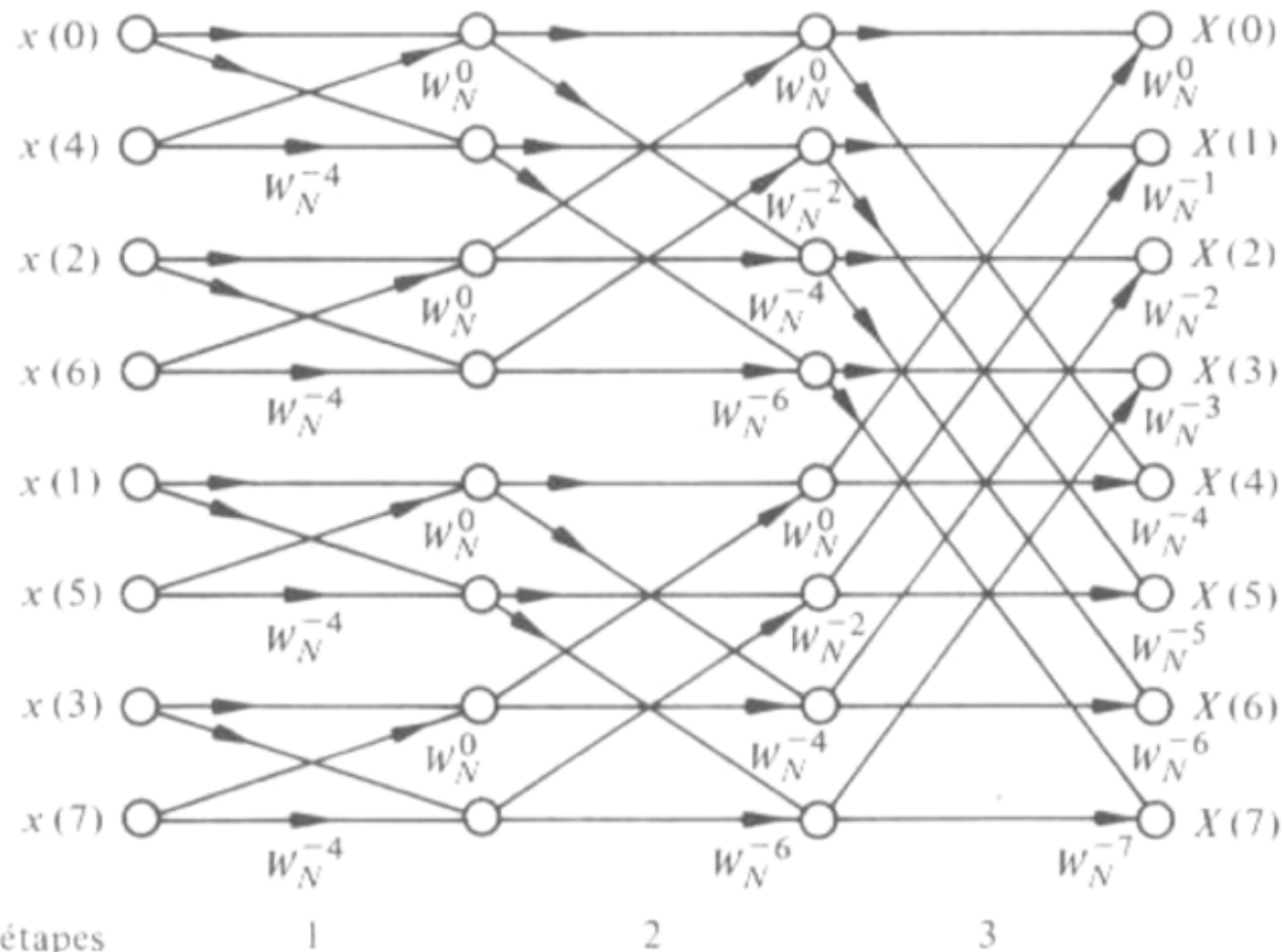


- et ainsi de suite m fois
- A la fin, il restera des TFD d'ordre 2 :



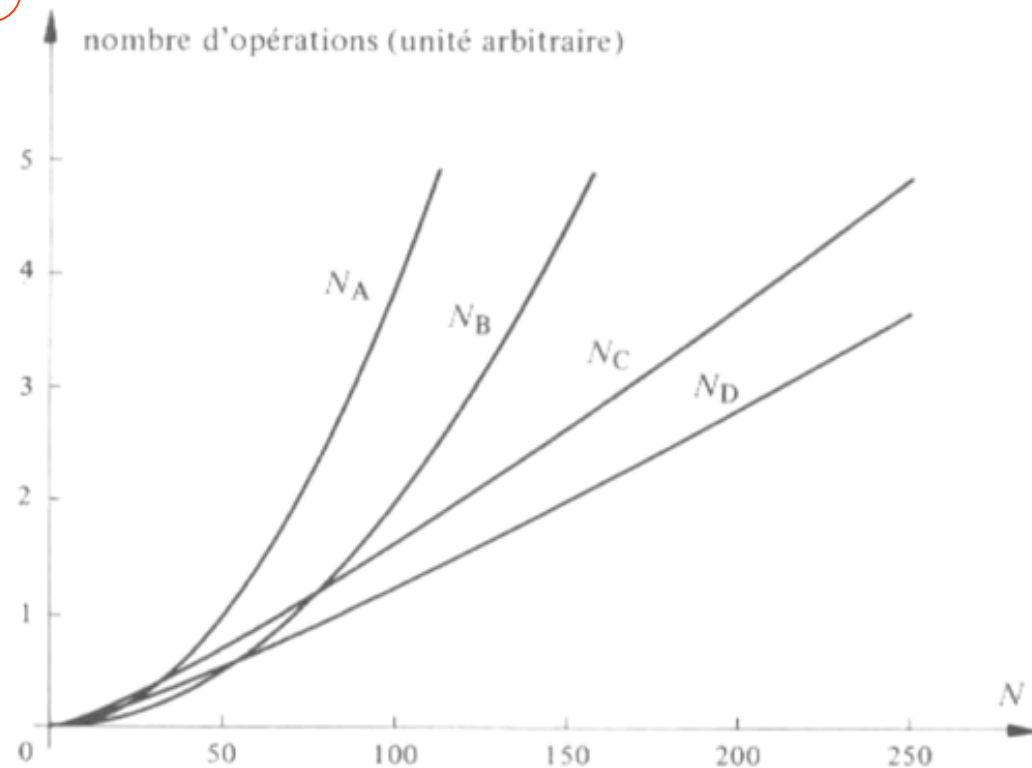
4.5. Transformée de Fourier Rapide

- Au total (sur notre exemple d'ordre $N=8$), on a :



4.5. Transformée de Fourier Rapide

- Complexité de la corrélation/convolution de signaux de longueur N :
 - calcul direct : $O(N^2)$ (courbes N_A et N_B - voir détails Vol. XX Traité d'Elec. EPFL)
 - calcul par FFT : $O(N \log_2 N)$



4.6 Corrélation - densité spectrale d'énergie

- Signaux à énergie finie

Intercorrélation: $\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$

Autocorrélation: $\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$

Propriété: $\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t)dt$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \|x\|^2 = W_x$ énergie du signal

Relations avec la convolution: $\phi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau)$
 $\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau)$

4.6 Corrélation - densité spectrale d'énergie

- Densité spectrale d'énergie

Déf.: $\overset{\circ}{\Phi}_x(f)$ la Transformée de Fourier de $\overset{\circ}{\phi}_x(\tau)$

$$\overset{\circ}{\Phi}_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{\phi}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$\overset{\circ}{\phi}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{\Phi}_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

En particulier: $\overset{\circ}{\phi}_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{\Phi}_x(f) df = W_x$

D'où son nom : $\overset{\circ}{\Phi}_x(f)$ est la *densité spectrale d'énergie* de $x(t)$

4.7 Corrélation - densité spectrale de puissance

- Signaux à énergie infinie mais à puissance moyenne finie

Intercorrélation: $\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t + \tau)dt$

Autocorrélation: $\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t + \tau)dt$

Propriété: $\phi_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$
 $= P_x$ puissance du signal

4.7 Corrélation - densité spectrale de puissance

- Densité spectrale de puissance

Déf.: $\Phi_x(f)$ la Transformée de Fourier de $\phi_x(\tau)$

$$\Phi_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

En particulier: $\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df = P_x$

D'où son nom : $\Phi_x(f)$ est la *densité spectrale de puissance* de $x(t)$